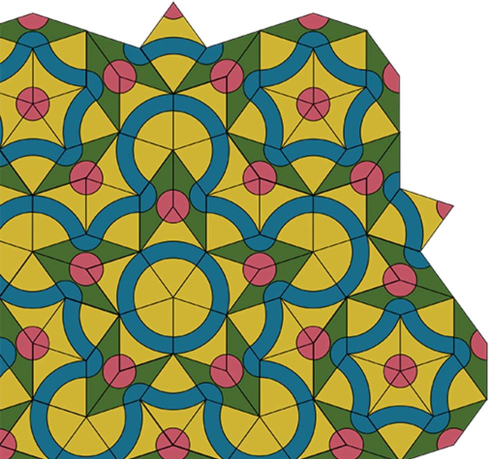
Die Welt der Penrose-Parkettierungen

Eduard Schesler

15. August 2016



Was ist eine Parkettierung?

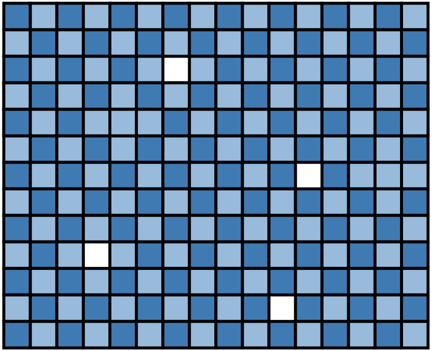
Definition

Eine Parkettierung der Ebene ist eine lückenlose Aufteilung der Ebene in Bausteine die sich nur am Rand berühren.

Was ist eine Parkettierung?

Definition

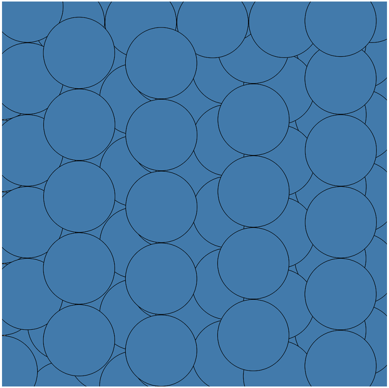
Eine Parkettierung der Ebene ist eine **lückenlose** Aufteilung der Ebene in Bausteine die sich nur am Rand berühren.



Was ist eine Parkettierung?

Definition

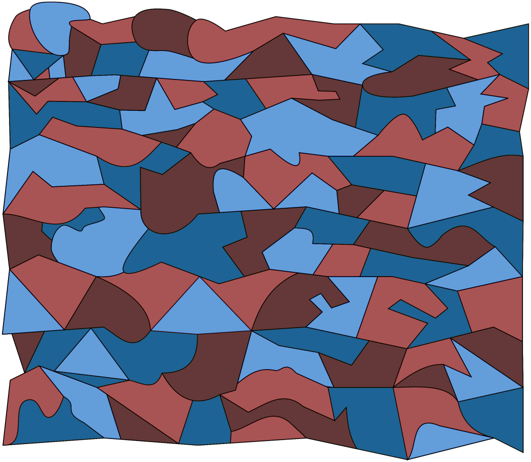
Eine Parkettierung der Ebene ist eine lückenlose Aufteilung der Ebene in Bausteine die sich nur **am Rand** berühren.



Eine wilde Parkettierung

Wenn man nicht voraussetzt, dass man nur **endlich** viele Bausteine hat, dann erhält man unregelmäßige Parkettierungen.

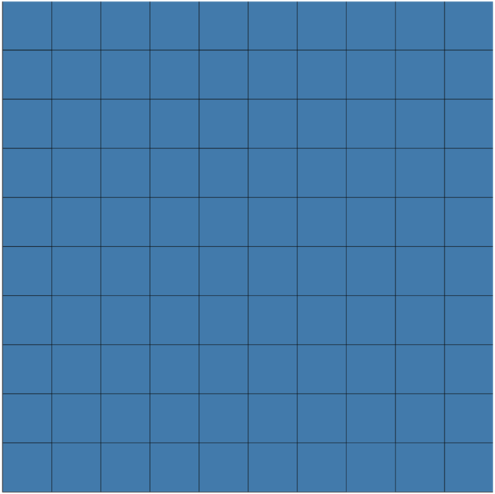
Wilde Parkettierung:



Beispiele von Parkettierungen mit wenigen Bausteinen

Beispiel

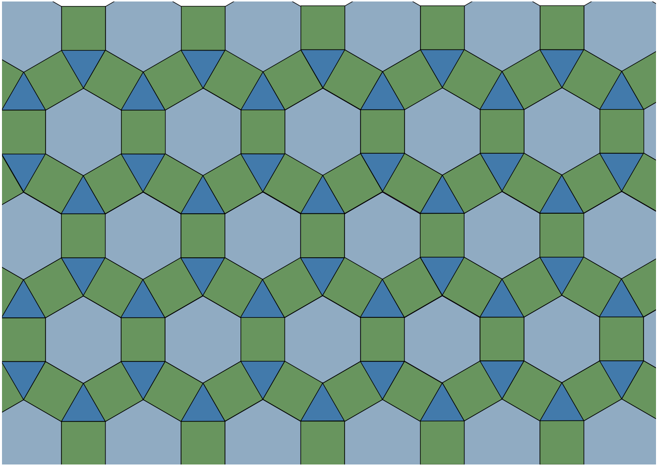
Die folgende Parkettierung besteht nur aus Quadraten.



Beispiele von Parkettierungen mit wenigen Bausteinen

Beispiel

Die folgende Parkettierung erhält man aus Dreiecken, Vierecken und Sechsecken.



Periodische und aperiodische Parkettierungen

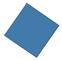
Definition

Wenn man die Parkettierung so verschieben kann, sodass man danach keinen Unterschied zu vorher sehen kann, dann nennt man die Parkettierung **periodisch**.

Falls es keine solche Verschiebung gibt, so nennt man die Parkettierung **aperiodisch**.

Satz

*Mit Quadraten kann man **nur** periodische erstellen.*



Periodische und aperiodische Parkettierungen

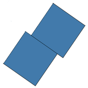
Definition

Wenn man die Parkettierung so verschieben kann, sodass man danach keinen Unterschied zu vorher sehen kann, dann nennt man die Parkettierung **periodisch**.

Falls es keine solche Verschiebung gibt, so nennt man die Parkettierung **aperiodisch**.

Satz

*Mit Quadraten kann man **nur** periodische erstellen.*



Periodische und aperiodische Parkettierungen

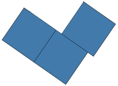
Definition

Wenn man die Parkettierung so verschieben kann, sodass man danach keinen Unterschied zu vorher sehen kann, dann nennt man die Parkettierung **periodisch**.

Falls es keine solche Verschiebung gibt, so nennt man die Parkettierung **aperiodisch**.

Satz

*Mit Quadraten kann man **nur** periodische erstellen.*



Periodische und aperiodische Parkettierungen

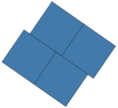
Definition

Wenn man die Parkettierung so verschieben kann, sodass man danach keinen Unterschied zu vorher sehen kann, dann nennt man die Parkettierung **periodisch**.

Falls es keine solche Verschiebung gibt, so nennt man die Parkettierung **aperiodisch**.

Satz

*Mit Quadraten kann man **nur** periodische erstellen.*



Periodische und aperiodische Parkettierungen

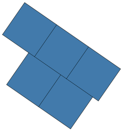
Definition

Wenn man die Parkettierung so verschieben kann, sodass man danach keinen Unterschied zu vorher sehen kann, dann nennt man die Parkettierung **periodisch**.

Falls es keine solche Verschiebung gibt, so nennt man die Parkettierung **aperiodisch**.

Satz

*Mit Quadraten kann man **nur** periodische erstellen.*



Periodische und aperiodische Parkettierungen

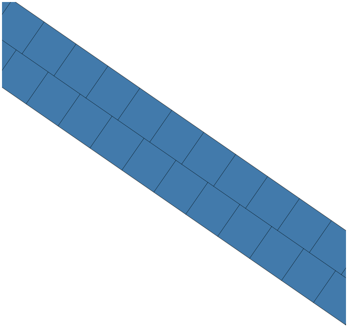
Definition

Wenn man die Parkettierung so verschieben kann, sodass man danach keinen Unterschied zu vorher sehen kann, dann nennt man die Parkettierung **periodisch**.

Falls es keine solche Verschiebung gibt, so nennt man die Parkettierung **aperiodisch**.

Satz

*Mit Quadraten kann man **nur** periodische erstellen.*



Periodische und aperiodische Parkettierungen

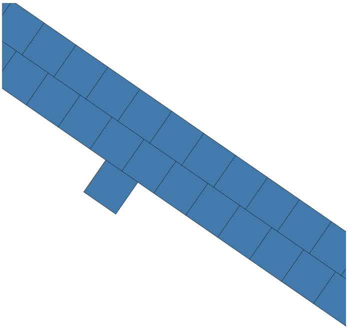
Definition

Wenn man die Parkettierung so verschieben kann, sodass man danach keinen Unterschied zu vorher sehen kann, dann nennt man die Parkettierung **periodisch**.

Falls es keine solche Verschiebung gibt, so nennt man die Parkettierung **aperiodisch**.

Satz

*Mit Quadraten kann man **nur** periodische erstellen.*



Periodische und aperiodische Parkettierungen

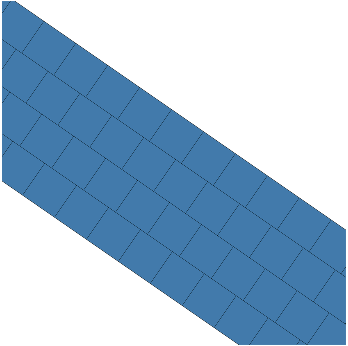
Definition

Wenn man die Parkettierung so verschieben kann, sodass man danach keinen Unterschied zu vorher sehen kann, dann nennt man die Parkettierung **periodisch**.

Falls es keine solche Verschiebung gibt, so nennt man die Parkettierung **aperiodisch**.

Satz

*Mit Quadraten kann man **nur** periodische erstellen.*



Periodische und aperiodische Parkettierungen

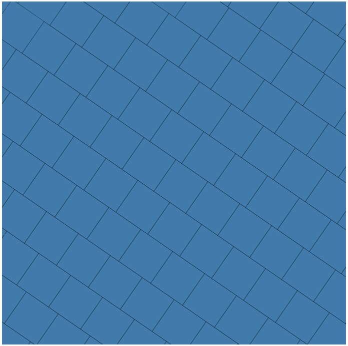
Definition

Wenn man die Parkettierung so verschieben kann, sodass man danach keinen Unterschied zu vorher sehen kann, dann nennt man die Parkettierung **periodisch**.

Falls es keine solche Verschiebung gibt, so nennt man die Parkettierung **aperiodisch**.

Satz

*Mit Quadraten kann man **nur** periodische erstellen.*



Periodische und aperiodische Parkettierungen

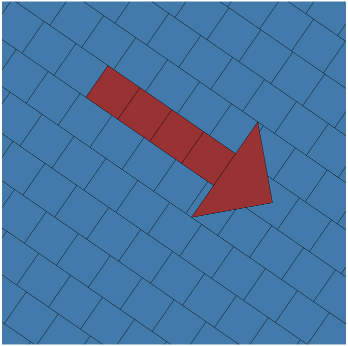
Definition

Wenn man die Parkettierung so verschieben kann, sodass man danach keinen Unterschied zu vorher sehen kann, dann nennt man die Parkettierung **periodisch**.

Falls es keine solche Verschiebung gibt, so nennt man die Parkettierung **aperiodisch**.

Satz

*Mit Quadraten kann man **nur** periodische erstellen.*



Periodische und aperiodische Parkettierungen

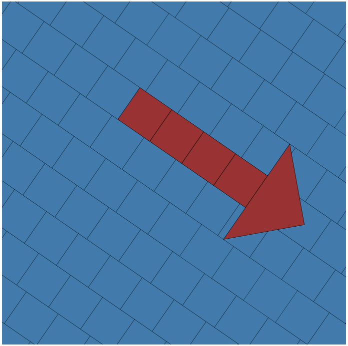
Definition

Wenn man die Parkettierung so verschieben kann, sodass man danach keinen Unterschied zu vorher sehen kann, dann nennt man die Parkettierung **periodisch**.

Falls es keine solche Verschiebung gibt, so nennt man die Parkettierung **aperiodisch**.

Satz

*Mit Quadraten kann man **nur** periodische erstellen.*



Periodische und aperiodische Parkettierungen

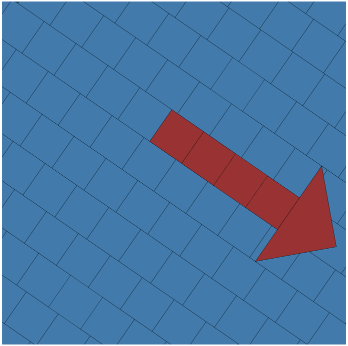
Definition

Wenn man die Parkettierung so verschieben kann, sodass man danach keinen Unterschied zu vorher sehen kann, dann nennt man die Parkettierung **periodisch**.

Falls es keine solche Verschiebung gibt, so nennt man die Parkettierung **aperiodisch**.

Satz

*Mit Quadraten kann man **nur** periodische erstellen.*



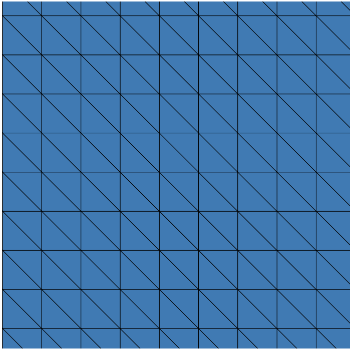
Periodische und aperiodische Parkettierungen

Mit Dreiecken kann man **sowohl** periodische **als auch** aperiodische Parkettierungen erstellen:

Periodische und aperiodische Parkettierungen

Mit Dreiecken kann man **sowohl** periodische **als auch** aperiodische Parkettierungen erstellen:

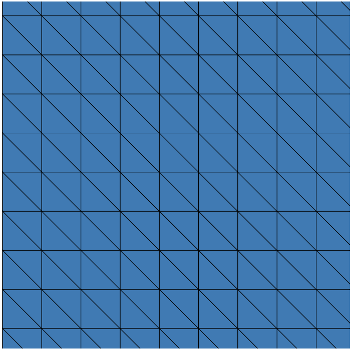
Periodisches Dreieckmuster:



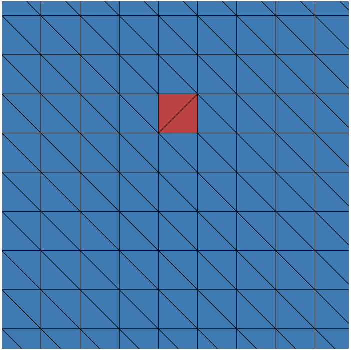
Periodische und aperiodische Parkettierungen

Mit Dreiecken kann man **sowohl** periodische **als auch** aperiodische Parkettierungen erstellen:

Periodisches Dreieckmuster:

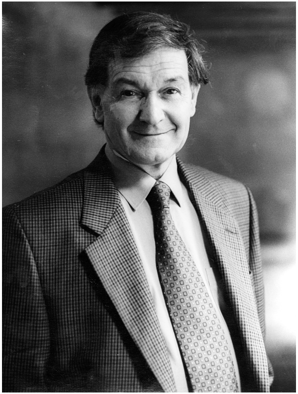


Aperiodisches Dreieckmuster:



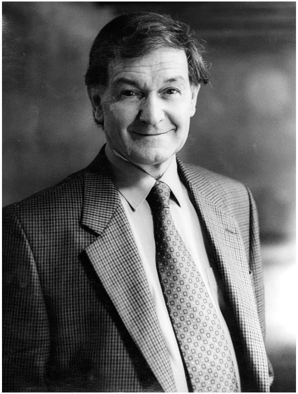
Periodische und aperiodische Parkettierungen

- Gibt es auch eine endliche Menge von Bausteinen die nur aperiodische Parkettierungen erlauben?
- Ja! Die erste solche Menge hatte **20426** Bausteine und wurde 1966 von Robert Berger entdeckt.
- Bis 1971 konnte die Anzahl einer solchen Menge von Bausteinen auf **6** reduziert werden.
- 1974 hat der britische Roger Penrose **2** Bausteine gefunden mit denen man nur aperiodische Parkettierungen erzeugen kann.
- Keiner weiß ob es einen einzelnen Baustein gibt mit dem man nur aperiodische Parkettierungen erzeugen kann.



Roger Penrose

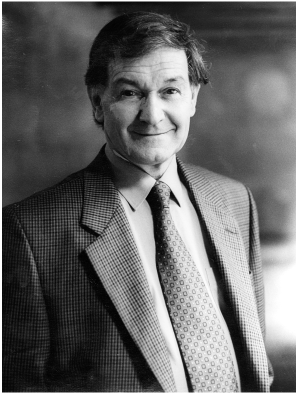
- Gibt es auch eine endliche Menge von Bausteinen die nur aperiodische Parkettierungen erlauben?
- Ja! Die erste solche Menge hatte **20426** Bausteine und wurde 1966 von Robert Berger entdeckt.
- Bis 1971 konnte die Anzahl einer solchen Menge von Bausteinen auf **6** reduziert werden.
- 1974 hat der britische Roger Penrose **2** Bausteine gefunden mit denen man nur aperiodische Parkettierungen erzeugen kann.
- Keiner weiß ob es einen einzelnen Baustein gibt mit dem man nur aperiodische Parkettierungen erzeugen kann.



Roger Penrose

Periodische und aperiodische Parkettierungen

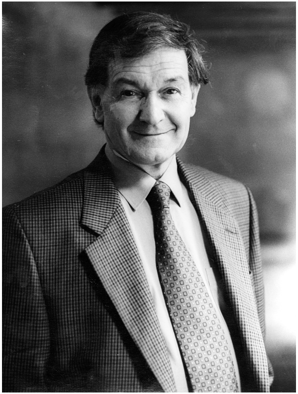
- Gibt es auch eine endliche Menge von Bausteinen die nur aperiodische Parkettierungen erlauben?
- Ja! Die erste solche Menge hatte **20426** Bausteine und wurde 1966 von Robert Berger entdeckt.
- Bis 1971 konnte die Anzahl einer solchen Menge von Bausteinen auf **6** reduziert werden.
- 1974 hat der britische Roger Penrose **2** Bausteine gefunden mit denen man nur aperiodische Parkettierungen erzeugen kann.
- Keiner weiß ob es einen einzelnen Baustein gibt mit dem man nur aperiodische Parkettierungen erzeugen kann.



Roger Penrose

Periodische und aperiodische Parkettierungen

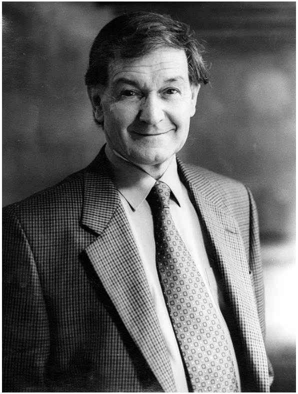
- Gibt es auch eine endliche Menge von Bausteinen die nur aperiodische Parkettierungen erlauben?
- Ja! Die erste solche Menge hatte **20426** Bausteine und wurde 1966 von Robert Berger entdeckt.
- Bis 1971 konnte die Anzahl einer solchen Menge von Bausteinen auf **6** reduziert werden.
- 1974 hat der britische Roger Penrose **2** Bausteine gefunden mit denen man nur aperiodische Parkettierungen erzeugen kann.
- Keiner weiß ob es einen einzelnen Baustein gibt mit dem man nur aperiodische Parkettierungen erzeugen kann.



Roger Penrose

Periodische und aperiodische Parkettierungen

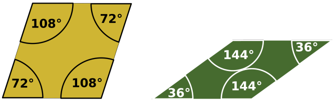
- Gibt es auch eine endliche Menge von Bausteinen die nur aperiodische Parkettierungen erlauben?
- Ja! Die erste solche Menge hatte **20426** Bausteine und wurde 1966 von Robert Berger entdeckt.
- Bis 1971 konnte die Anzahl einer solchen Menge von Bausteinen auf **6** reduziert werden.
- 1974 hat der britische Roger Penrose **2** Bausteine gefunden mit denen man nur aperiodische Parkettierungen erzeugen kann.
- Keiner weiß ob es einen einzelnen Baustein gibt mit dem man nur aperiodische Parkettierungen erzeugen kann.



Roger Penrose

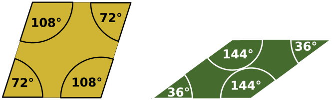
Penrose-Bausteine

Penrose hat die folgenden beiden Bausteine für seine Parkettierung verwendet.

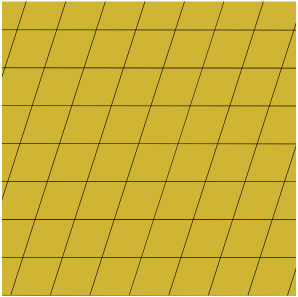


Penrose-Bausteine

Penrose hat die folgenden beiden Bausteine für seine Parkettierung verwendet.

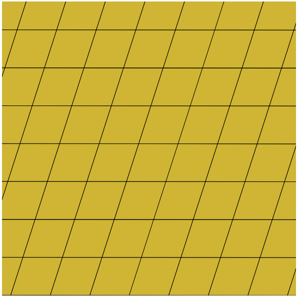


Damit kann man jedoch **auch periodische** Muster erstellen.

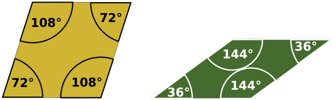


Penrose-Bausteine

Damit kann man jedoch **auch periodische** Muster erstellen.



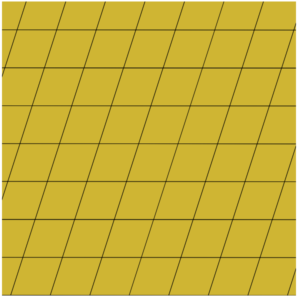
Penrose hat die folgenden beiden Bausteine für seine Parkettierung verwendet.



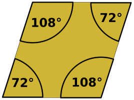
Solche und ähnliche Parkettierungen kann man **verhindern** indem man die Bausteine am Rand mit Beulen und Kerben verziert.

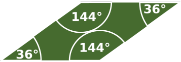
Penrose-Bausteine

Damit kann man jedoch **auch periodische** Muster erstellen.

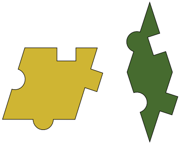


Penrose hat die folgenden beiden Bausteine für seine Parkettierung verwendet.



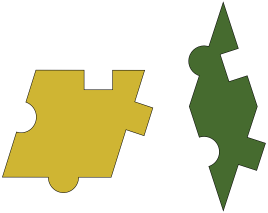


Solche und ähnliche Parkettierungen kann man **verhindern** indem man die Bausteine am Rand mit Beulen und Kerben verziert.

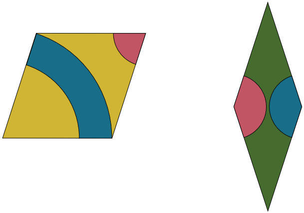


schönere Penrose-Bausteine

Bausteine mit Beulen und Kerben



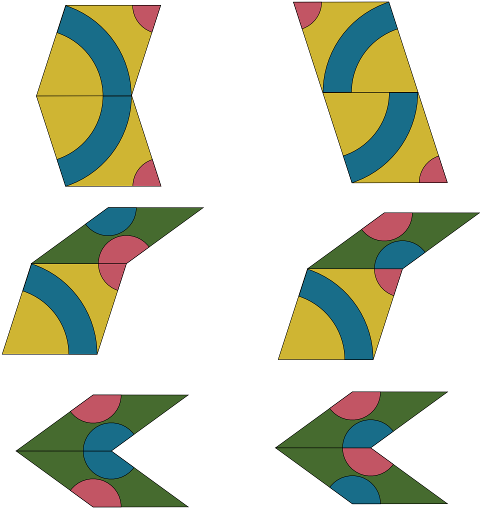
mit Mustern verzierte Bausteine



Regeln zum Anlegen der Bausteine

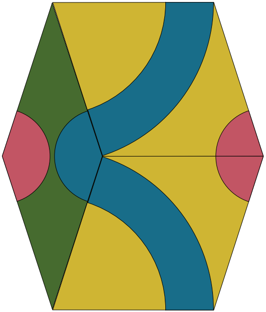
Hierbei darf man nur dann zwei Bausteine aneinander legen wenn sich deren Muster ergänzen:

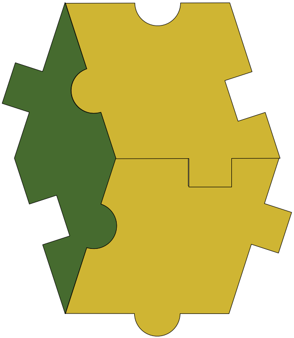
erlaubt verboten



Äquivalenz der verschiendenen Penrose-Bausteine

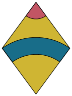
So erhält man genau die Muster, die man auch mit den Puzzlestücken erhalten könnte.



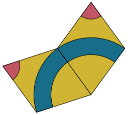


Ein Beispiel für den Aufbau einer Penrose-Parkettierung

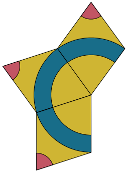
Ein Beispiel für den Aufbau einer Penrose-Parkettierung



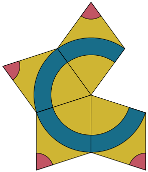
Ein Beispiel für den Aufbau einer Penrose-Parkettierung



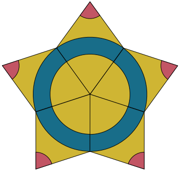
Ein Beispiel für den Aufbau einer Penrose-Parkettierung



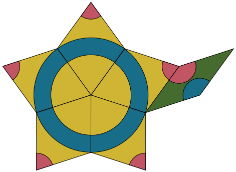
Ein Beispiel für den Aufbau einer Penrose-Parkettierung



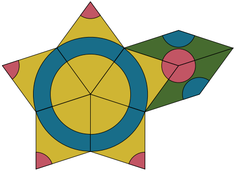
Ein Beispiel für den Aufbau einer Penrose-Parkettierung



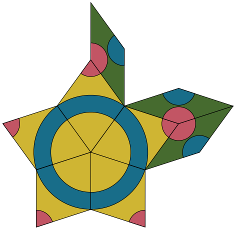
Ein Beispiel für den Aufbau einer Penrose-Parkettierung



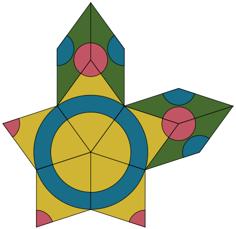
Ein Beispiel für den Aufbau einer Penrose-Parkettierung



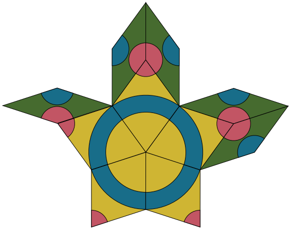
Ein Beispiel für den Aufbau einer Penrose-Parkettierung



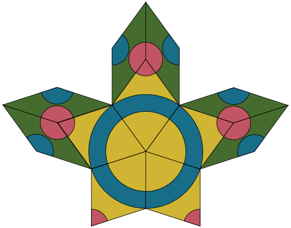
Ein Beispiel für den Aufbau einer Penrose-Parkettierung



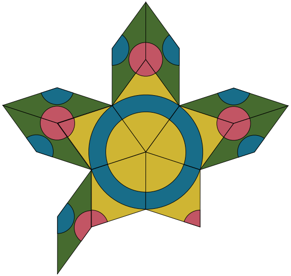
Ein Beispiel für den Aufbau einer Penrose-Parkettierung



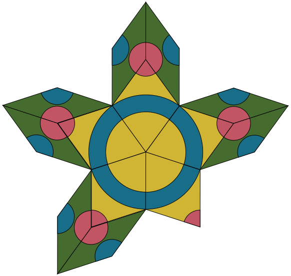
Ein Beispiel für den Aufbau einer Penrose-Parkettierung



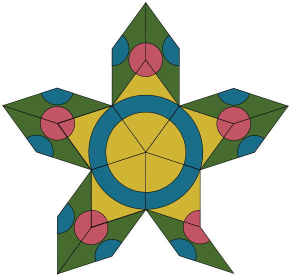
Ein Beispiel für den Aufbau einer Penrose-Parkettierung



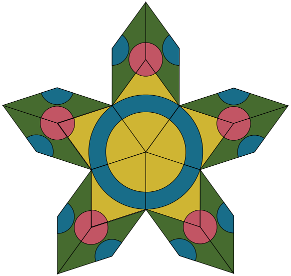
Ein Beispiel für den Aufbau einer Penrose-Parkettierung



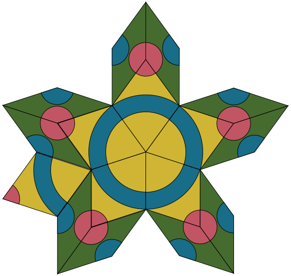
Ein Beispiel für den Aufbau einer Penrose-Parkettierung



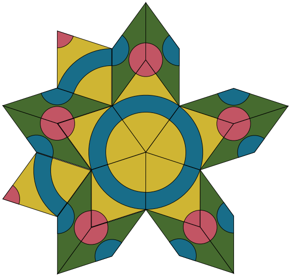
Ein Beispiel für den Aufbau einer Penrose-Parkettierung



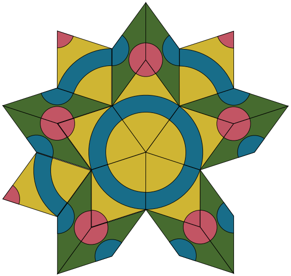
Ein Beispiel für den Aufbau einer Penrose-Parkettierung



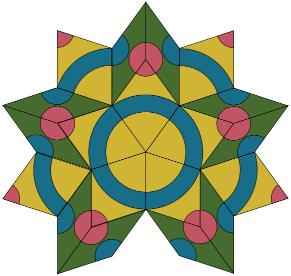
Ein Beispiel für den Aufbau einer Penrose-Parkettierung



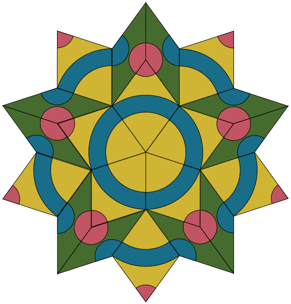
Ein Beispiel für den Aufbau einer Penrose-Parkettierung



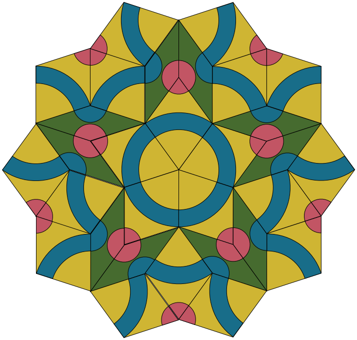
Ein Beispiel für den Aufbau einer Penrose-Parkettierung



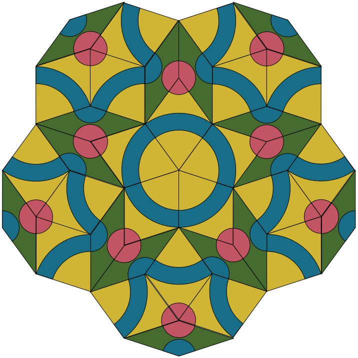
Ein Beispiel für den Aufbau einer Penrose-Parkettierung



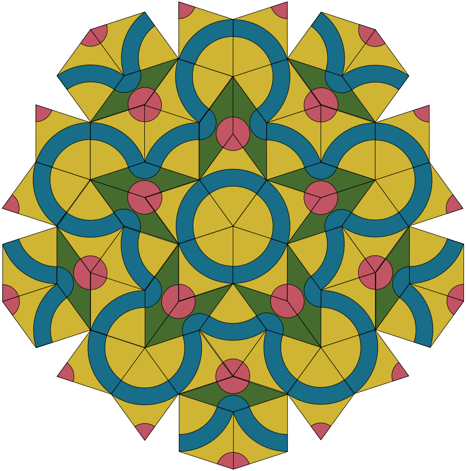
Ein Beispiel für den Aufbau einer Penrose-Parkettierung



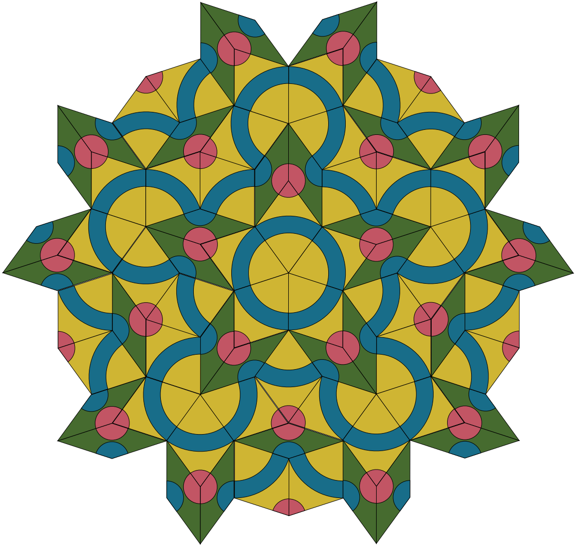
Ein Beispiel für den Aufbau einer Penrose-Parkettierung



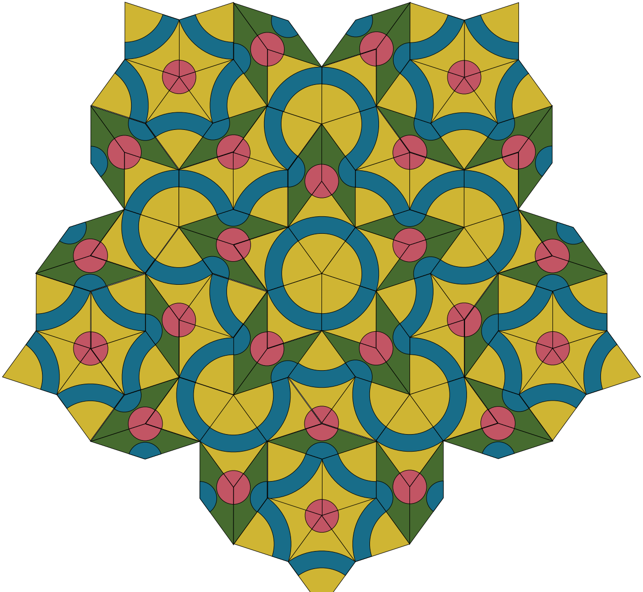
Ein Beispiel für den Aufbau einer Penrose-Parkettierung



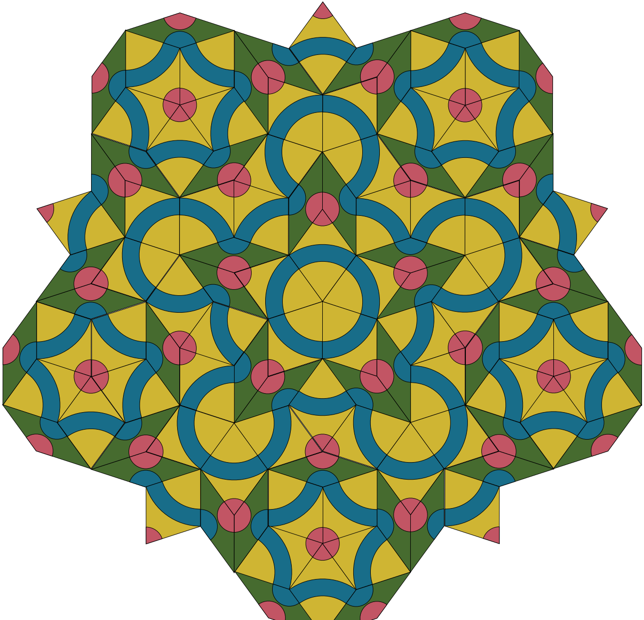
Ein Beispiel für den Aufbau einer Penrose-Parkettierung



Ein Beispiel für den Aufbau einer Penrose-Parkettierung

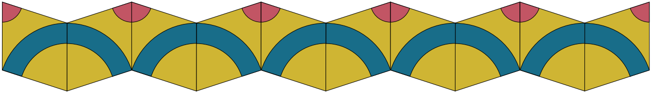


Ein Beispiel für den Aufbau einer Penrose-Parkettierung



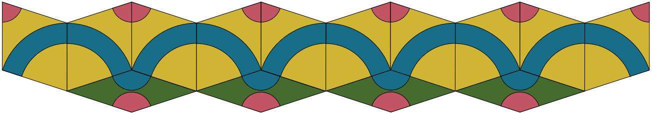
Probleme beim Aufbau

Es kann Probleme geben **selbst wenn** man die Anordnungsregeln beachtet.



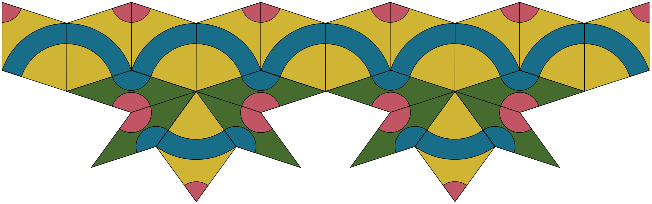
Probleme beim Aufbau

Es kann Probleme geben **selbst wenn** man die Anordnungsregeln beachtet.



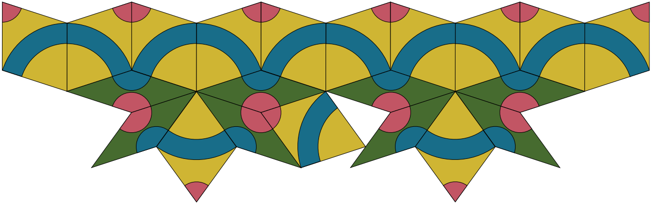
Probleme beim Aufbau

Es kann Probleme geben **selbst wenn** man die Anordnungsregeln beachtet.



Probleme beim Aufbau

Es kann Probleme geben **selbst wenn** man die Anordnungsregeln beachtet.



Überdeckung der Ebene

- Wie kann man sich sicher sein, dass man mit einer Menge von Bauteilen die gesamte Ebene überdecken kann?
- Ein wichtiges Hilfsmittel liefert das folgende Resultat, welches unabhängig von Penrose-Parkettierungen ist.

Überdeckung der Ebene

- Wie kann man sich sicher sein, dass man mit einer Menge von Bauteilen die gesamte Ebene überdecken kann?
- Ein wichtiges Hilfsmittel liefert das folgende Resultat, welches unabhängig von Penrose-Parkettierungen ist.

Überdeckung der Ebene

- Wie kann man sich sicher sein, dass man mit einer Menge von Bauteilen die gesamte Ebene überdecken kann?
- Ein wichtiges Hilfsmittel liefert das folgende Resultat, welches unabhängig von Penrose-Parkettierungen ist.

Theorem (Erweiterungstheorem)

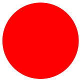
Hat man eine endliche Menge von Bausteinen mit denen man Scheiben beliebiger Größe überdecken kann, dann kann man auch die gesamte Ebene überdecken.

Überdeckung der Ebene

- Wie kann man sich sicher sein, dass man mit einer Menge von Bauteilen die gesamte Ebene überdecken kann?
- Ein wichtiges Hilfsmittel liefert das folgende Resultat, welches unabhängig von Penrose-Parkettierungen ist.

Theorem (Erweiterungstheorem)

Hat man eine endliche Menge von Bausteinen mit denen man Scheiben beliebiger Größe überdecken kann, dann kann man auch die gesamte Ebene überdecken.

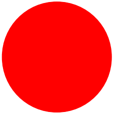


Überdeckung der Ebene

- Wie kann man sich sicher sein, dass man mit einer Menge von Bauteilen die gesamte Ebene überdecken kann?
- Ein wichtiges Hilfsmittel liefert das folgende Resultat, welches unabhängig von Penrose-Parkettierungen ist.

Theorem (Erweiterungstheorem)

Hat man eine endliche Menge von Bausteinen mit denen man Scheiben beliebiger Größe überdecken kann, dann kann man auch die gesamte Ebene überdecken.

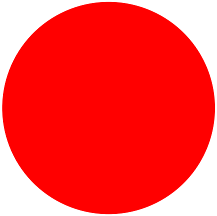


Überdeckung der Ebene

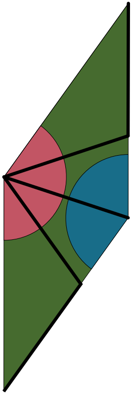
- Wie kann man sich sicher sein, dass man mit einer Menge von Bauteilen die gesamte Ebene überdecken kann?
- Ein wichtiges Hilfsmittel liefert das folgende Resultat, welches unabhängig von Penrose-Parkettierungen ist.

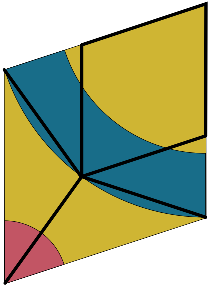
Theorem (Erweiterungstheorem)

Hat man eine endliche Menge von Bausteinen mit denen man Scheiben beliebiger Größe überdecken kann, dann kann man auch die gesamte Ebene überdecken.

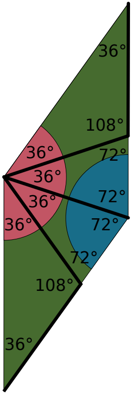


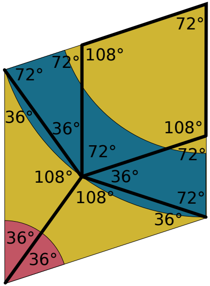
der Deflationsprozess



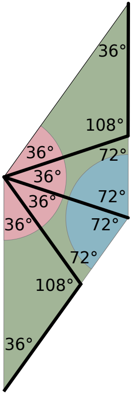


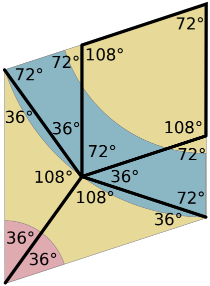
der Deflationsprozess



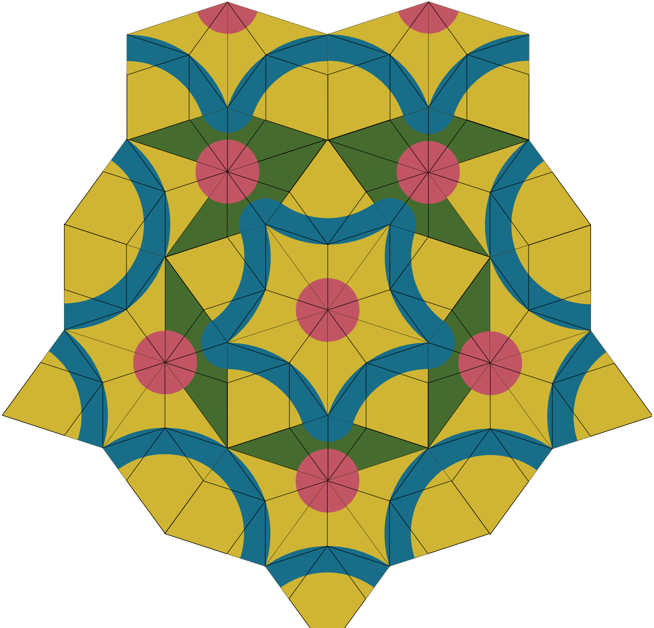


der Deflationsprozess

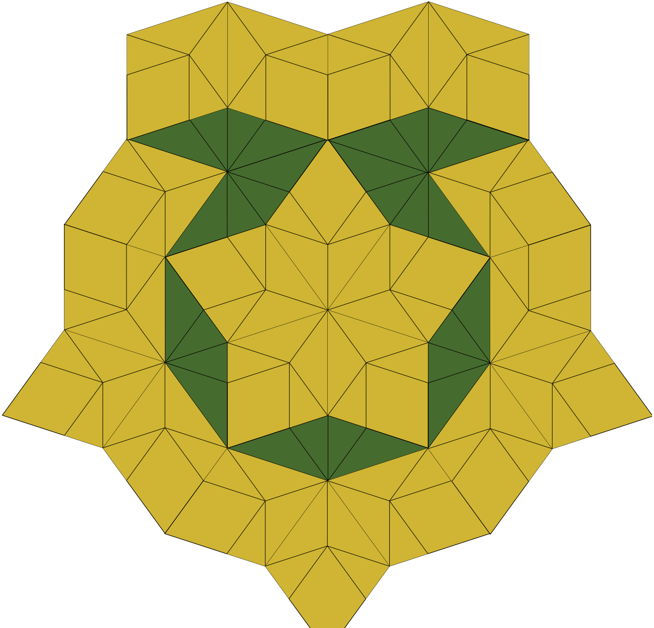




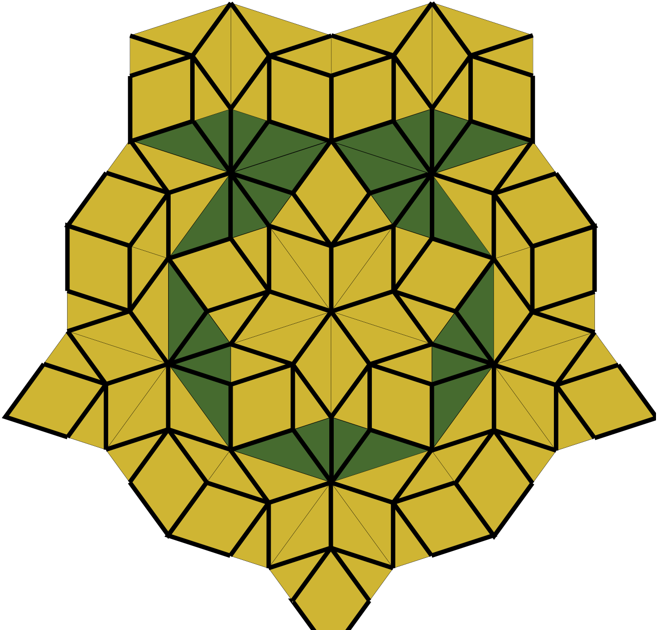
der Deflationsprozess



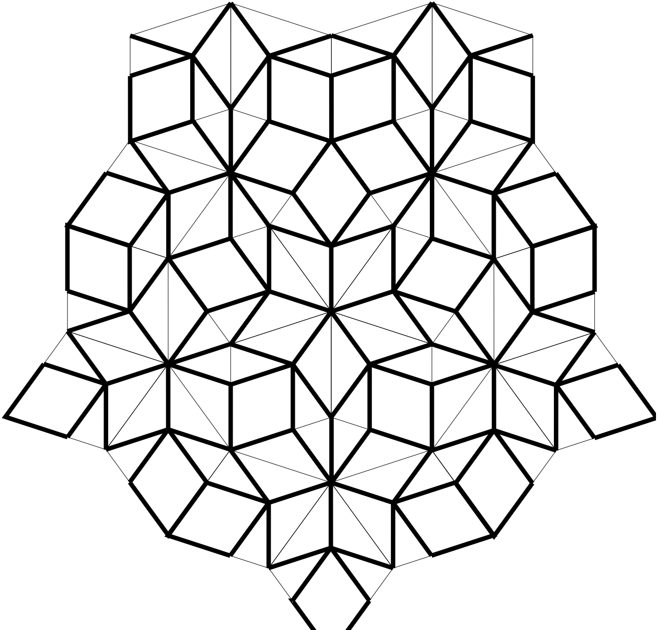
der Deflationsprozess



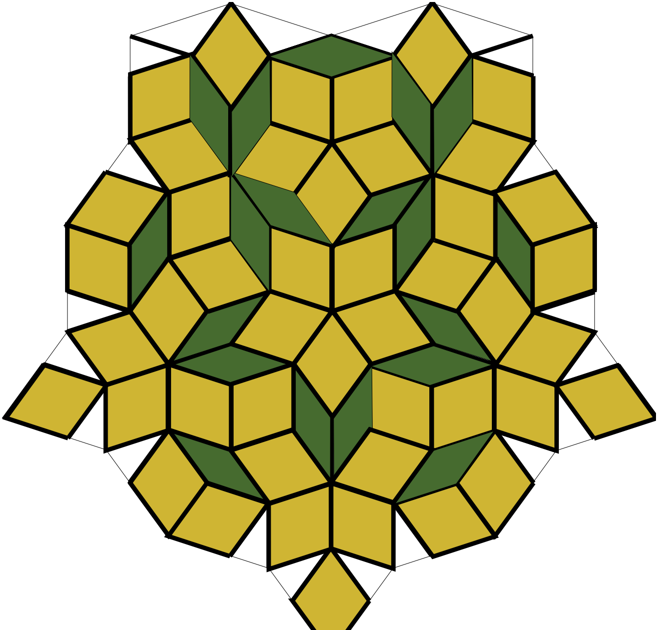
der Deflationsprozess



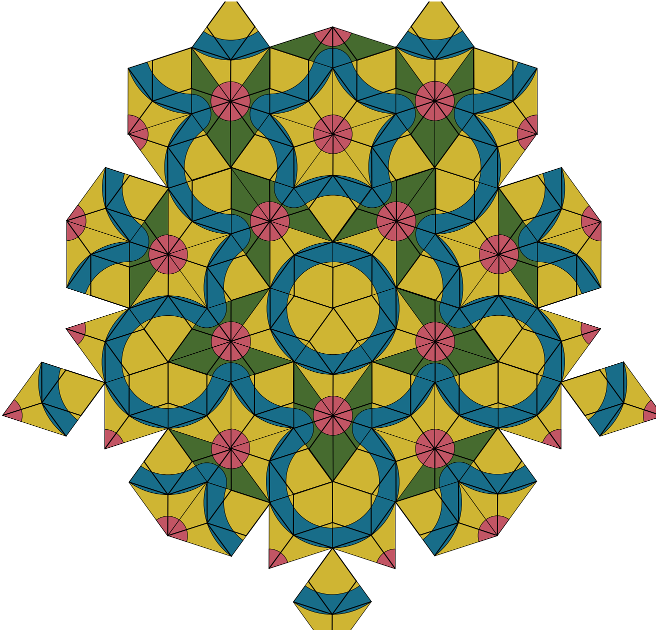
der Deflationsprozess



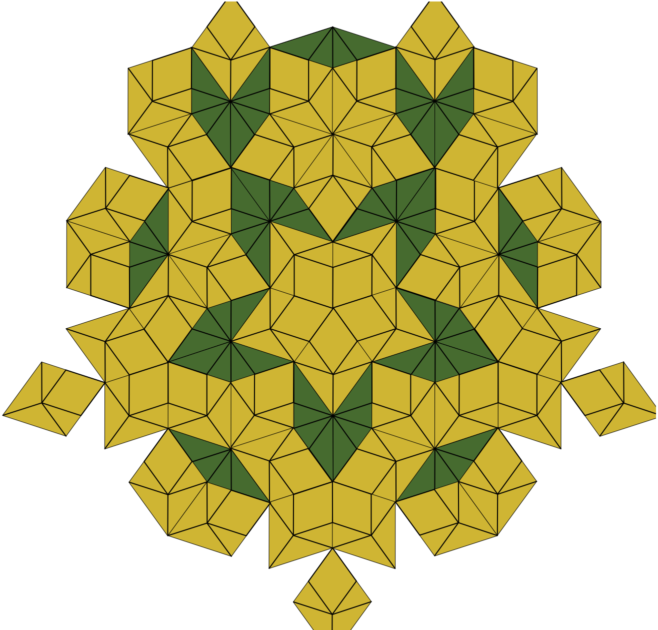
der Deflationsprozess



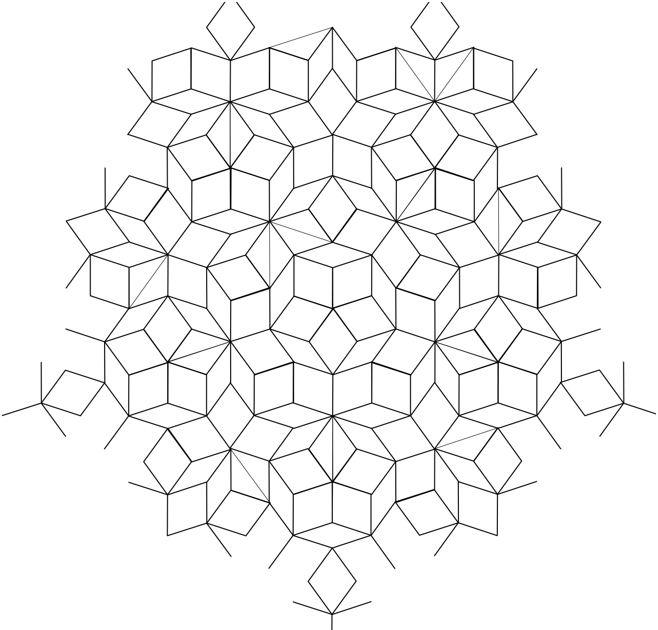
der Deflationsprozess



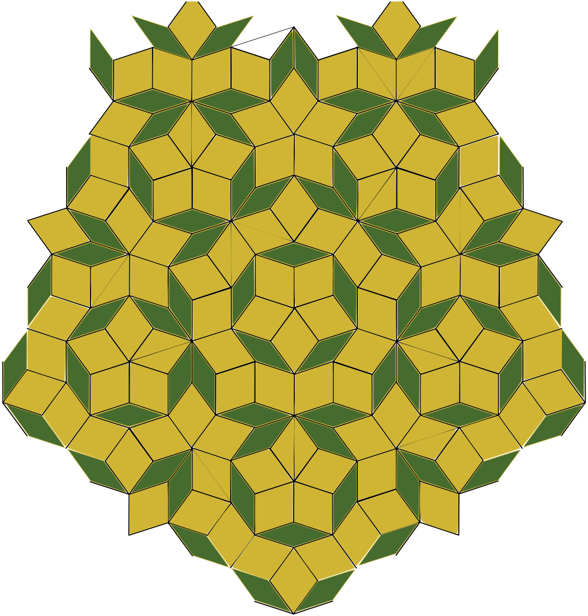
der Deflationsprozess



der Deflationsprozess



der Deflationsprozess



Penrose Parkettierung der gesamten Ebene

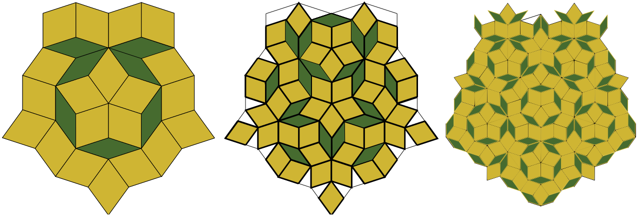
Theorem

Man kann mit den Penrose Bausteinen die ganze Ebene abdecken, wenn man die Anordnungsregeln beachtet.

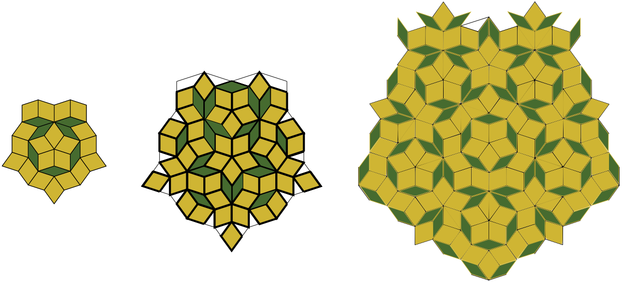
Beweis.

Hat man eine kleine Scheibe mit einem Penrose-Muster überdeckt, dann kann man den Deflationsprozess so lange durchführen und auf die Bausteine auf die eigentliche Größe zurückführen bis man eine doppelt so große Scheibe überdecken kann. Die Aussage des Theorems folgt dann mit dem Erweiterungstheorem. □

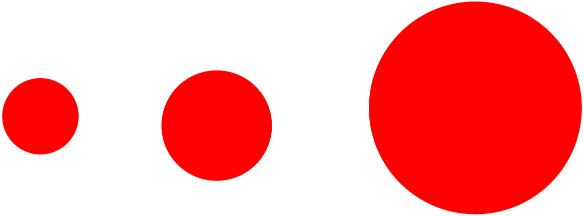
Penrose Parkettierung der gesamten Ebene



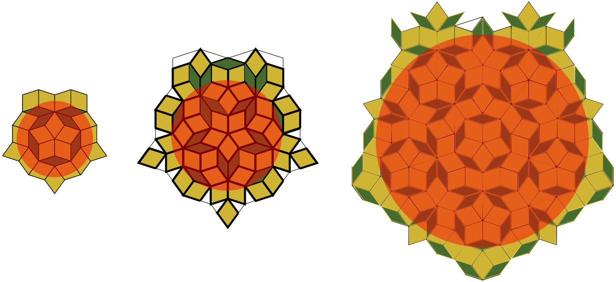
Penrose Parkettierung der gesamten Ebene



Penrose Parkettierung der gesamten Ebene



Penrose Parkettierung der gesamten Ebene



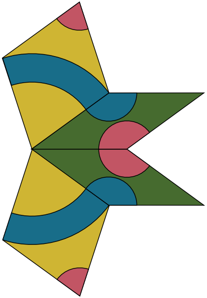
Aperiodizität der Penrose Parkettierungen

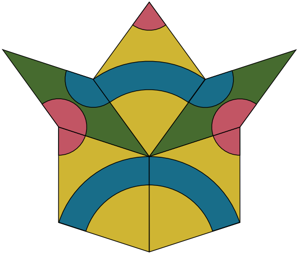
Theorem

Jede Parkettierung mit Penrose-Bausteinen ist aperiodisch.

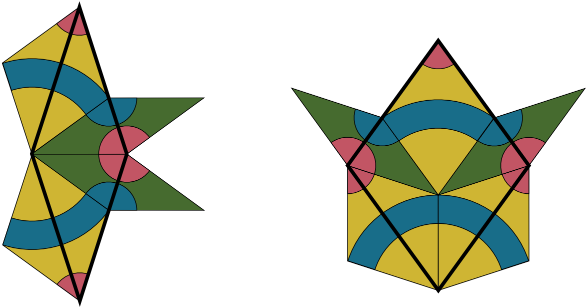
Bevor wir dies beweisen führen wir den Begriff der Inflation ein.

der Inflationsprozess

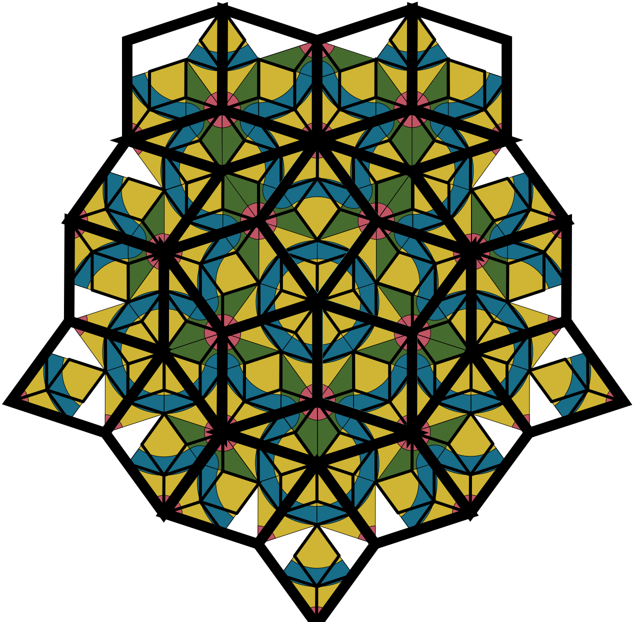




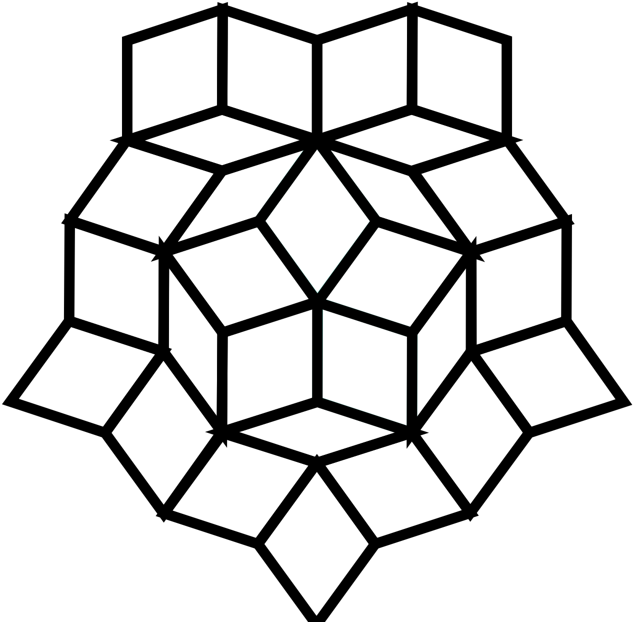
der Inflationsprozess



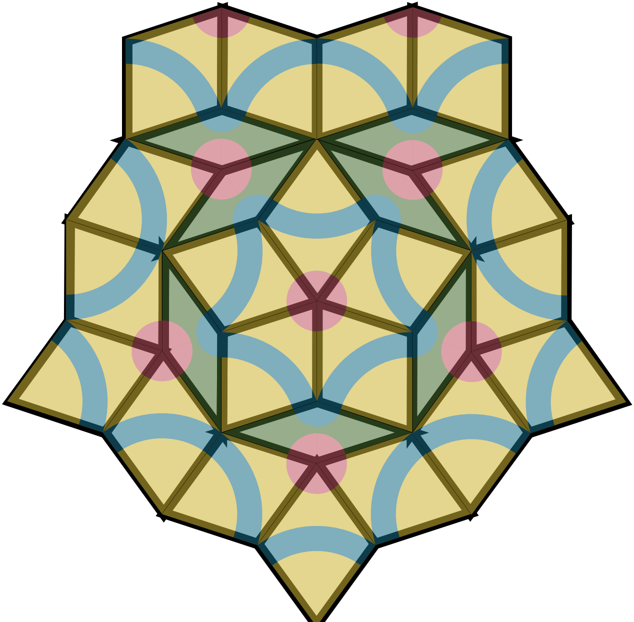
der Inflationsprozess



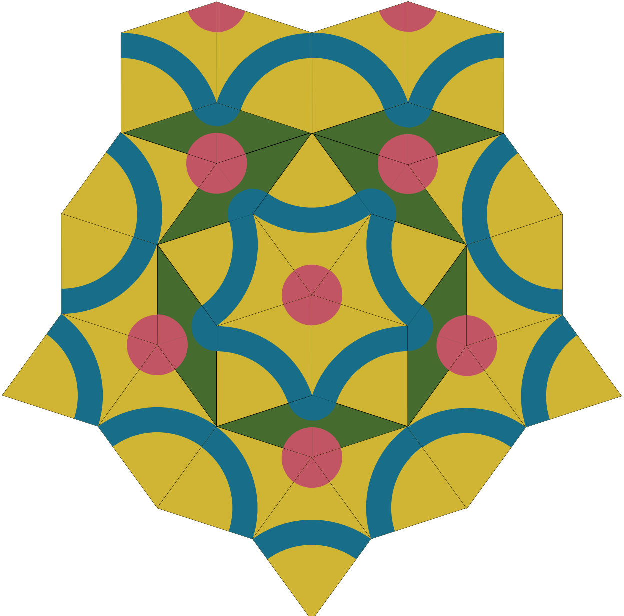
der Inflationsprozess



der Inflationsprozess



der Inflationsprozess



Vertauschung von Deflation und Inflation

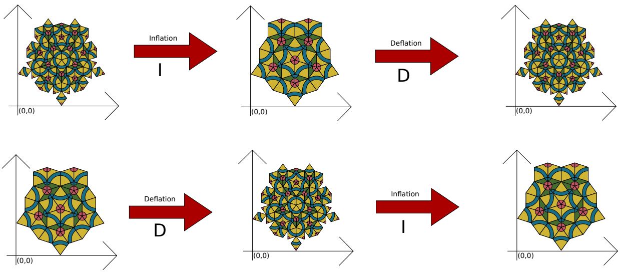
Lemma

Wendet man erst die Deflation und dann die Inflation an, so erhält man im Nachhinein das gleiche Muster. Dies gilt auch, wenn man erst die Inflation und dann die Deflation anwendet.

Vertauschung von Deflation und Inflation

Lemma

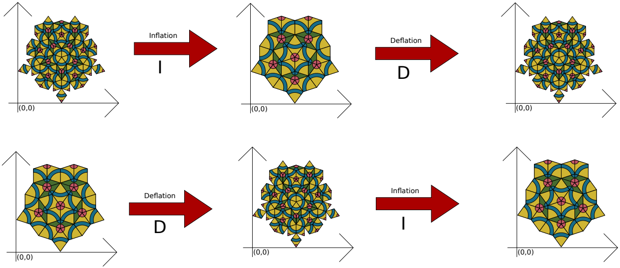
Wendet man erst die Deflation und dann die Inflation an, so erhält man im Nachhinein das gleiche Muster. Dies gilt auch, wenn man erst die Inflation und dann die Deflation anwendet.



Vertauschung von Deflation und Inflation

Lemma

Wendet man erst die Deflation und dann die Inflation an, so erhält man im Nachhinein das gleiche Muster. Dies gilt auch, wenn man erst die Inflation und dann die Deflation anwendet.



Falls also eine Penrose-Parkettierung P vorgegeben ist, dann gilt $D(I(P)) = P$ und $I(D(P)) = P$.

Deflationsprozess = D, Inflationsprozess = I

Beweis der Aperiodizität

Lemma

Wenn ein Penrose-Muster P erst ***inflationiert*** *wird, dann eine* ***Verschiebung*** *T auf das Muster angewendet wird, dann* ***deflationiert*** *wird, und schließlich die* ***Verschiebung rückgängig*** *gemacht wird, dann erhält man das* ***gleiche*** *Muster* ***wie vorher****.*

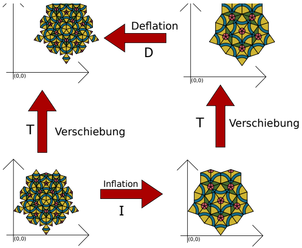
Kurz gesagt gilt $D(T(I(P))) = T(P)$.

Beweis der Aperiodizität

Lemma

Wenn ein Penrose-Muster P erst ***inflationiert*** *wird, dann eine* ***Verschiebung*** *T auf das Muster angewendet wird, dann* ***deflationiert*** *wird, und schließlich die* ***Verschiebung rückgängig*** *gemacht wird, dann erhält man das* ***gleiche*** *Muster* ***wie vorher****.*

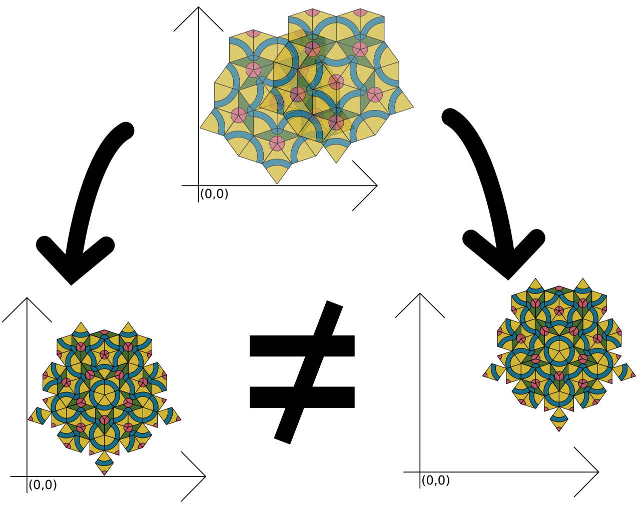
Kurz gesagt gilt $D(T(I(P))) = T(P)$.



Beweis der Aperiodizität

Folgerung

Falls man also mit zwei ***verschiedenen*** *Penrose-Mustern startet und den Deflations- bzw. den Inflationsprozess auf diese Muster anwendet, so erhält man wieder* ***zwei unterschiedliche*** *Muster.*


(0,0)
(0,0)
(0,0)

Folgerung

*Falls man also mit **zwei verschiedenen** Penrose-Mustern startet und den Deflations- bzw. den Inflationsprozess auf diese Muster anwendet, so erhält man **wieder zwei unterschiedliche** Muster.*

Folgerung

*Falls man also mit **zwei verschiedenen** Penrose-Mustern startet und den Deflations- bzw. den Inflationsprozess auf diese Muster anwendet, so erhält man **wieder zwei unterschiedliche** Muster.*

Beweis.

- Es seien zwei verschiedene Penrose-Parkettierungen P und Q vorgegeben.
- Angenommen es gilt $D(P) = D(Q)$.
- Dann gilt auch $I(D(P)) = I(D(Q))$.
- Wegen $I(D(P)) = P$ und $I(D(Q)) = Q$ folgt $P = Q$.
- Ein Widerspruch zur Voraussetzung.
- Also muss $D(P) \neq D(Q)$ gelten.
- Analog erhält man $I(P) \neq I(Q)$.

□

Folgerung

*Falls man also mit **zwei verschiedenen** Penrose-Mustern startet und den Deflations- bzw. den Inflationsprozess auf diese Muster anwendet, so erhält man **wieder zwei unterschiedliche** Muster.*

Beweis.

- Es seien zwei verschiedene Penrose-Parkettierungen P und Q vorgegeben.
- Angenommen es gilt $D(P) = D(Q)$.
- Dann gilt auch $I(D(P)) = I(D(Q))$.
- Wegen $I(D(P)) = P$ und $I(D(Q)) = Q$ folgt $P = Q$.
- Ein Widerspruch zur Voraussetzung.
- Also muss $D(P) \neq D(Q)$ gelten.
- Analog erhält man $I(P) \neq I(Q)$.

□

Folgerung

*Falls man also mit **zwei verschiedenen** Penrose-Mustern startet und den Deflations- bzw. den Inflationsprozess auf diese Muster anwendet, so erhält man **wieder zwei unterschiedliche** Muster.*

Beweis.

- Es seien zwei verschiedene Penrose-Parkettierungen P und Q vorgegeben.
- Angenommen es gilt $D(P) = D(Q)$.
- Dann gilt auch $I(D(P)) = I(D(Q))$.
- Wegen $I(D(P)) = P$ und $I(D(Q)) = Q$ folgt $P = Q$.
- Ein Widerspruch zur Voraussetzung.
- Also muss $D(P) \neq D(Q)$ gelten.
- Analog erhält man $I(P) \neq I(Q)$.

□

Folgerung

*Falls man also mit **zwei verschiedenen** Penrose-Mustern startet und den Deflations- bzw. den Inflationsprozess auf diese Muster anwendet, so erhält man **wieder zwei unterschiedliche** Muster.*

Beweis.

- Es seien zwei verschiedene Penrose-Parkettierungen P und Q vorgegeben.
- Angenommen es gilt $D(P) = D(Q)$.
- Dann gilt auch $I(D(P)) = I(D(Q))$.
- Wegen $I(D(P)) = P$ und $I(D(Q)) = Q$ folgt $P = Q$.
- Ein Widerspruch zur Voraussetzung.
- Also muss $D(P) \neq D(Q)$ gelten.
- Analog erhält man $I(P) \neq I(Q)$.

$\square$

Folgerung

*Falls man also mit **zwei verschiedenen** Penrose-Mustern startet und den Deflations- bzw. den Inflationsprozess auf diese Muster anwendet, so erhält man **wieder zwei unterschiedliche** Muster.*

Beweis.

- Es seien zwei verschiedene Penrose-Parkettierungen P und Q vorgegeben.
- Angenommen es gilt $D(P) = D(Q)$.
- Dann gilt auch $I(D(P)) = I(D(Q))$.
- Wegen $I(D(P)) = P$ und $I(D(Q)) = Q$ folgt $P = Q$.
- Ein Widerspruch zur Voraussetzung.
- Also muss $D(P) \neq D(Q)$ gelten.
- Analog erhält man $I(P) \neq I(Q)$.

$\square$

Folgerung

*Falls man also mit **zwei verschiedenen** Penrose-Mustern startet und den Deflations- bzw. den Inflationsprozess auf diese Muster anwendet, so erhält man **wieder zwei unterschiedliche** Muster.*

Beweis.

- Es seien zwei verschiedene Penrose-Parkettierungen P und Q vorgegeben.
- Angenommen es gilt $D(P) = D(Q)$.
- Dann gilt auch $I(D(P)) = I(D(Q))$.
- Wegen $I(D(P)) = P$ und $I(D(Q)) = Q$ folgt $P = Q$.
- Ein Widerspruch zur Voraussetzung.
- Also muss $D(P) \neq D(Q)$ gelten.
- Analog erhält man $I(P) \neq I(Q)$.

□

kein Unterschied

Satz

Falls es eine Verschiebung in einer Penrose-Parketierung gibt, sodass nach der Verschiebung ***kein Unterschied*** *zu sehen ist, dann kann es nach einer Inflation mit der gleichen Verschiebung* ***keinen Unterschied*** *geben.*

kein Unterschied

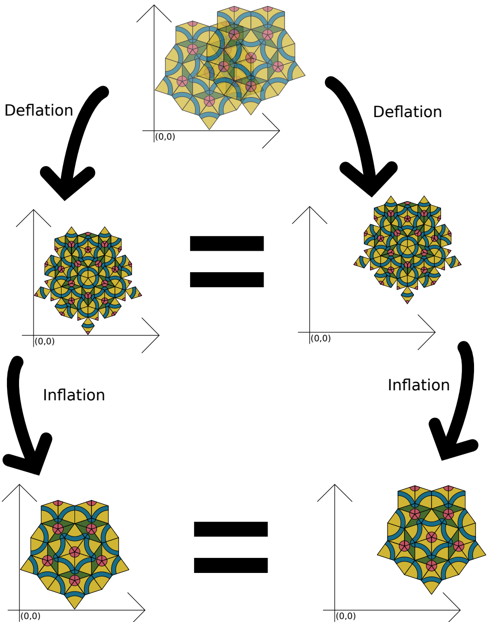
Satz

*Falls es eine Verschiebung in einer Penrose-Parketierung gibt, sodass nach der Verschiebung **kein Unterschied** zu sehen ist, dann kann es nach einer Inflation mit der gleichen Verschiebung **keinen Unterschied** geben.*

Beweis.

Es sei P eine Penrose-Parkettierung und T eine Verschiebung des Musters, für welche sich nach der Verschiebung nichts am Muster ändert. Es gilt also $T(P) = P$. Sei nun $Q = I(P)$ die Inflation von P. Dann ist $T(Q) = Q$ zu zeigen. Angenommen es gilt $T(Q) \neq Q$. Aus obigen Bemerkungen folgt dann $D(T(Q)) \neq D(Q)$. Dann wäre aber $T(P) = D(T(I(P))) = D(T(I(P))) = D(T(Q)) \neq D(Q) = D(I(P)) = P$. Dies steht jedoch im Widerspruch zur Voraussetzung $T(P) = P$. $\square$

Widerspruch



Penrose-Bausteine sind aperiodisch

Theorem

Jede Parkettierung mit Penrose-Bausteinen ist aperiodisch.

Penrose-Bausteine sind aperiodisch

Theorem

Jede Parkettierung mit Penrose-Bausteinen ist aperiodisch.

Beweis.

- Angenommen es gäbe eine Verschiebung in einer Penrose-Parkettierung, sodass nach der Verschiebung die gleiche Parkettierung zu sehen ist.
- Dann können auch Punkte a und b in der Ebene gefunden werden die aufeinander abgebildet werden.
- Nun kann der Inflationsprozess so lange auf die Parkettierung abgebildet werden bis die beiden Punkte in dem gleichen Baustein liegen.
- Nach dem obigen Satz dürfte die Verschiebung auch in diesem gröberen Muster keine Auswirkung haben.
- Dies kann aber offensichtlich nicht sein, da sich der große Baustein in dem sich a und b befinden nach der Verschiebung selbstüberlappt.

□

Penrose-Bausteine sind aperiodisch

Theorem

Jede Parkettierung mit Penrose-Bausteinen ist aperiodisch.

Beweis.

- Angenommen es gäbe eine Verschiebung in einer Penrose-Parkettierung, sodass nach der Verschiebung die gleiche Parkettierung zu sehen ist.
- Dann können auch Punkte a und b in der Ebene gefunden werden die aufeinander abgebildet werden.
- Nun kann der Inflationsprozess so lange auf die Parkettierung abgebildet werden bis die beiden Punkte in dem gleichen Baustein liegen.
- Nach dem obigen Satz dürfte die Verschiebung auch in diesem gröberen Muster keine Auswirkung haben.
- Dies kann aber offensichtlich nicht sein, da sich der große Baustein in dem sich a und b befinden nach der Verschiebung selbstüberlappt.

□

Penrose-Bausteine sind aperiodisch

Theorem

Jede Parkettierung mit Penrose-Bausteinen ist aperiodisch.

Beweis.

- Angenommen es gäbe eine Verschiebung in einer Penrose-Parkettierung, sodass nach der Verschiebung die gleiche Parkettierung zu sehen ist.
- Dann können auch Punkte a und b in der Ebene gefunden werden die aufeinander abgebildet werden.
- Nun kann der Inflationsprozess so lange auf die Parkettierung abgebildet werden bis die beiden Punkte in dem gleichen Baustein liegen.
- Nach dem obigen Satz dürfte die Verschiebung auch in diesem gröberen Muster keine Auswirkung haben.
- Dies kann aber offensichtlich nicht sein, da sich der große Baustein in dem sich a und b befinden nach der Verschiebung selbstüberlappt.

□

Penrose-Bausteine sind aperiodisch

Theorem

Jede Parkettierung mit Penrose-Bausteinen ist aperiodisch.

Beweis.

- Angenommen es gäbe eine Verschiebung in einer Penrose-Parkettierung, sodass nach der Verschiebung die gleiche Parkettierung zu sehen ist.
- Dann können auch Punkte a und b in der Ebene gefunden werden die aufeinander abgebildet werden.
- Nun kann der Inflationsprozess so lange auf die Parkettierung abgebildet werden bis die beiden Punkte in dem gleichen Baustein liegen.
- Nach dem obigen Satz dürfte die Verschiebung auch in diesem gröberen Muster keine Auswirkung haben.
- Dies kann aber offensichtlich nicht sein, da sich der große Baustein in dem sich a und b befinden nach der Verschiebung selbstüberlappt.

□

Penrose-Bausteine sind aperiodisch

Theorem

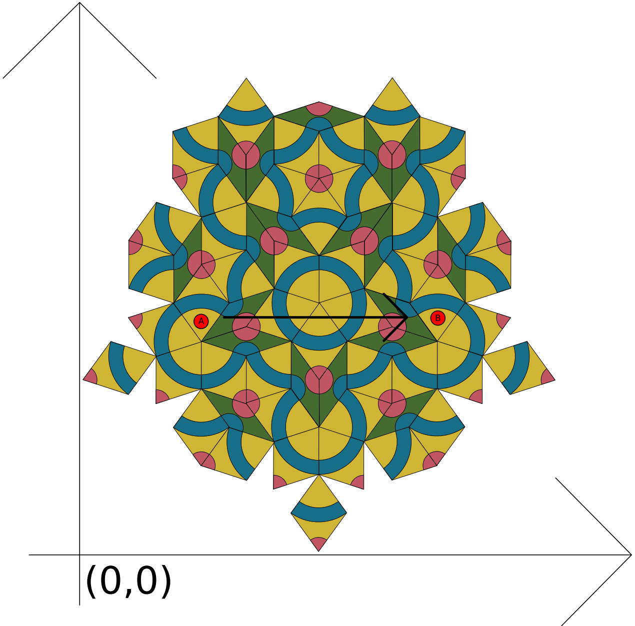
Jede Parkettierung mit Penrose-Bausteinen ist aperiodisch.

Beweis.

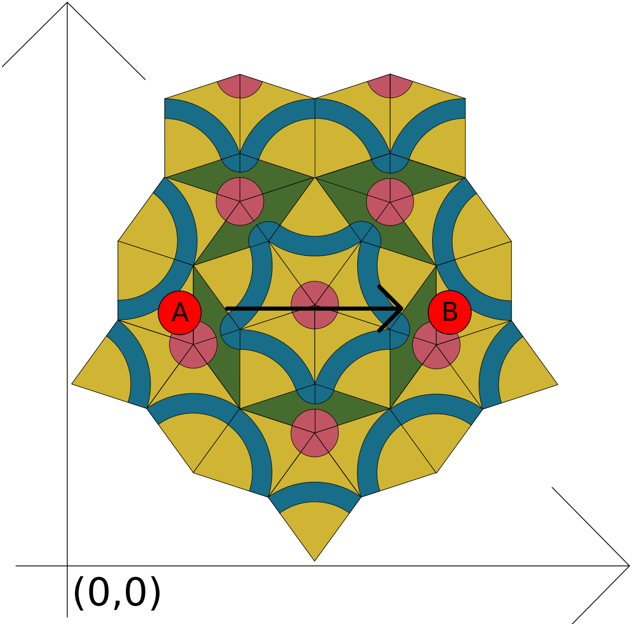
- Angenommen es gäbe eine Verschiebung in einer Penrose-Parkettierung, sodass nach der Verschiebung die gleiche Parkettierung zu sehen ist.
- Dann können auch Punkte a und b in der Ebene gefunden werden die aufeinander abgebildet werden.
- Nun kann der Inflationsprozess so lange auf die Parkettierung abgebildet werden bis die beiden Punkte in dem gleichen Baustein liegen.
- Nach dem obigen Satz dürfte die Verschiebung auch in diesem gröberen Muster keine Auswirkung haben.
- Dies kann aber offensichtlich nicht sein, da sich der große Baustein in dem sich a und b befinden nach der Verschiebung selbstüberlappt.

$\square$

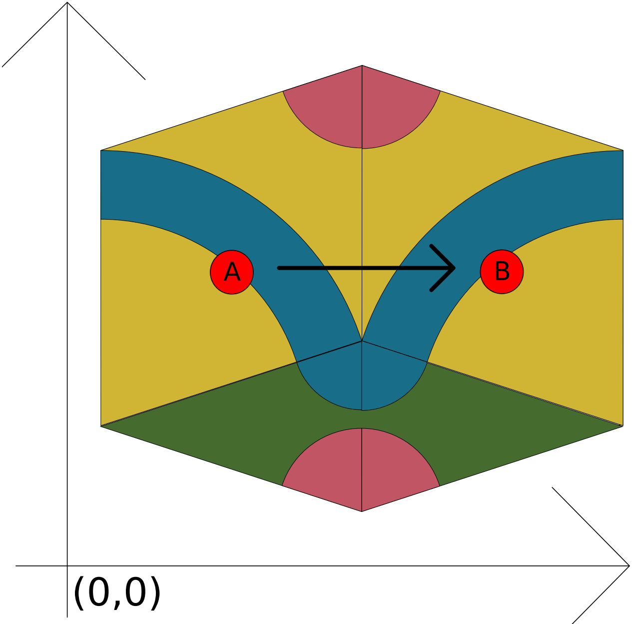
Penrose-Bausteine sind aperiodisch



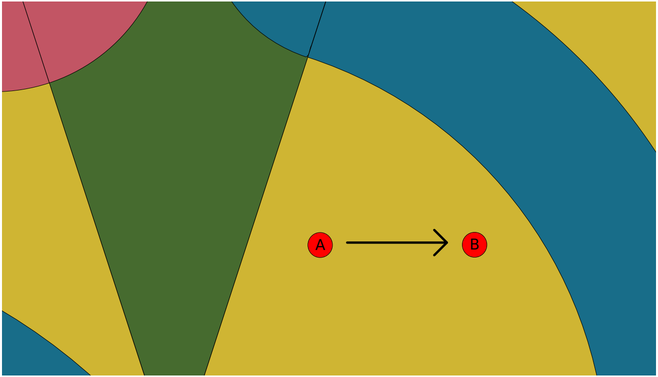
Penrose-Bausteine sind aperiodisch



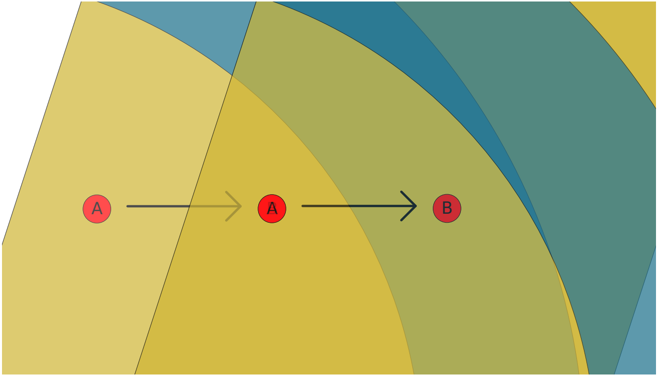
Penrose-Bausteine sind aperiodisch



Penrose-Bausteine sind aperiodisch



Penrose-Bausteine sind aperiodisch



Verschiedene Penrose-Parkettierungen

Theorem

Es gibt unendlich viele verschiedene Penrose-Parkettierungen.

Diese sind sich jedoch trotzdem ähnlich:

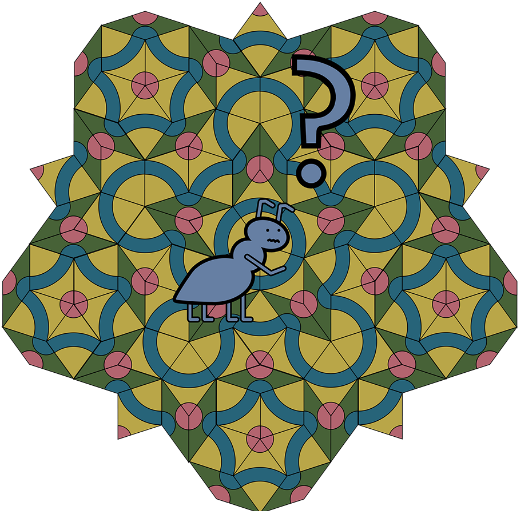
Theorem (Ameisen-Theorem)

Es seien zwei beliebige Penrose-Parkettierung P und Q vorgegeben. Falls man aus der Parkettierung P ein endliches Stück A vom Durchmesser D ausschneidet, dann gibt zu jedem Punkt x in Q ein Stück B von Q welches genauso aussieht wie D und höchstens $2D$-weit von x entfernt ist.

verwirrte Ameise

Folgerung

Eine Ameise die auf einer der unendlich vielen Penrose-Parkettierungen lebt kann also niemals herausfinden auf welcher Penrose-Parkettierungen sie lebt!



Vielen Dank für eure Aufmerksamkeit.