# Wachstum von Untergruppen hyperbolischer Gruppen

**Masterarbeit**

Vorgelegt von

**Eduard Schesler**

aus Medwedizkij

Angefertigt am
Mathematischen Institut
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

25. Juli 2016

Betreuer: Prof. Dr. Oleg Bogopolski

# Inhaltsverzeichnis

# Einleitung

In der vorgelegten Abschlussarbeit geht es um eine relative Version der bereits viel untersuchten Wachstumsfunktionen endlich erzeugter Gruppen. Ursprünglich motiviert durch Ergebnisse aus der Differentialgeometrie, welche die Wachstumsfunktion der Fundamentalgruppe einer kompakten riemannschen Mannigfaltigkeit mit ihrer Krümmung in Verbindung setzen (vgl. [M$^+$68]), hat sich das Studium von Wachstumsfunktionen als äußerst hilfreich bei der Beschreibung der algebraischen Struktur der zugrundeliegenden Gruppe erwiesen. Als Wachstumsfunktion einer endlich erzeugten Gruppe $G$ wird hierbei die Funktion $\beta_G^X : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}$ bezeichnet, wobei $X$ ein endliches Erzeugendensystem von $G$ ist und $\beta_G^X(n)$ die Anzahl der Elemente von $G$ bezeichnet, welche sich mit höchstens $n$ Erzeugern aus $X \cup X^{-1}$ schreiben lassen. Ein Beispiel, bei dem die Wachstumsfunktion die algebraische Struktur der Gruppe beschreibt ist Gromovs berühmtes Resultat, dass die Klasse der endlich erzeugten, virtuell nilpotenten Gruppen mit der Klasse der endlich erzeugten Gruppen mit polynomiell beschränkter Wachstumsfunktion übereinstimmt (vgl. [Gro81, S. 54]). Ein weiteres wichtiges Resultat, welches in einem historischen Rückblick zu Wachstumsfunktionen nicht fehlen darf, ist die Beantwortung von Milnors Frage nach der Existenz von endlich erzeugten Gruppen mit mittlerem Wachstum (vgl. [CWM$^+$68, Problem 5603]). Dies sind Gruppen deren Wachstumsfunktion schneller wächst als jedes Polynom, jedoch langsamer als jede exponentielle Funktion $n \mapsto a^n$ mit $a > 1$. Das Gruppen mit mittlerem Wachstum existieren bewies Grigorchuk durch explizite Angabe einer solchen Gruppe, welche auf einem binären Baum operiert (vgl. [Gri85, Theorem A]). Seine Konstruktion ist der Startpunkt einer ganzen Reihe erfolgreicher Untersuchungen zu Gruppen mit mittlerem Wachstum. Ist die Wachstumsfunktion einer Gruppe durch eine exponentielle Funktion der Form $n \mapsto a^n$ mit $a > 1$ nach unten beschränkt, so sagt man, dass diese Gruppe exponentielles Wachstum hat. Eine bessere Legitimation dieses Begriffes erhielte man jedoch, wenn es ein $a > 1$ gäbe, sodass es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Konstante $N_\varepsilon$ gibt, sodass die Ungleichungen

$$(a - \varepsilon)^n \leq \beta_G^X(n) \leq (a + \varepsilon)^n$$

für jedes $n \geq N_\varepsilon$ erfüllt sind. Das dies immer der Fall ist wurde bereits von Milnor bewiesen (vgl. [M$^+$68, S. 2]), indem er gezeigt hat, dass der Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_G^X(n)^{\frac{1}{n}}$ existiert. Für eine endlich erzeugte Gruppe macht es also Sinn von der exponentiellen Wachstumsrate $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_G^X(n)^{\frac{1}{n}}$ zu sprechen, wobei anzumerken ist, dass diese Terminologie auch dann verwendet wird, wenn die Gruppe $G$ kein exponentielles Wachstum hat. In diesem Fall ist einfach $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_G^X(n)^{\frac{1}{n}} = 1$. Es liegt nun nahe bei einer gegebenen Gruppe $G$ mit einem festen Erzeugendensystem $X$, auch das Wachstum der Untergruppen von $G$ zu untersuchen. Hierfür wird einer Untergruppe $H \leq G$ die relative Wachstumsfunktion $\beta_H^X : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}$ zugeordnet, wobei $\beta_H^X(n)$ die Anzahl der Elemente von $H$ bezeichnet, welche sich mit höchstens $n$ Erzeugern aus $X \cup X^{-1}$ schreiben lassen. Es stellt sich hier wieder die Frage nach der Existenz des Grenzwertes $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_H^X(n)^{\frac{1}{n}}$. Diesmal hängt die Existenz jedoch von der Struktur der Gruppe $G$ und möglicherweise auch vom gewählten Erzeugendensystem $X$ ab. Im Folgenden wird bei der Existenz des Grenzwertes $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_H^X(n)^{\frac{1}{n}}$, von der Existenz der relativen exponentiellen Wachstumsrate von $H$ in $G$ bezüglich $X$ gesprochen. Ein erstes Resultat, welches mit der Existenz relativer exponentieller Wachstumsraten zusammenhängt stammt von Grigorchuk, welcher bewiesen hat, dass die relative exponentielle Wachstumsrate normaler Untergruppen von freien Gruppen bezüglich freien Erzeugendensystemen existiert [Gri80a]. Olshanski hat dieses Resultat erweitert, indem er bewiesen hat, dass die relative exponentielle Wachstumsrate aller Untergruppen von freien Gruppen, bezüglich eines freien Erzeugendensystems, existiert (vgl. [Ols13, Theorem 1.5]).

In dieser Arbeit zeige ich, dass sich Olshanskis Existenzresultat auf allgemeinere Klassen von Gruppen verallgemeinern lässt. Im ersten Kapitel geht es zunächst, neben der Einführung von Grundbegriffen, welche im Zusammenhang mit dem relativen Wachstum von Untergruppen stehen, um die Bereitstellung analytischer Hilfsmittel, welche sich beim Nachweis der Existenz relativer exponentieller Wachstumsraten als nützlich erwiesen haben. Zudem führe ich die neue Definition der schwach quasikonvexen Untergruppen ein, welche eine natürliche Verallgemeinerung der bereits viel untersuchten quasikonvexen Untergruppen ist und zeige, dass die relative exponentielle Wachstumsrate einer schwach quasikonvexen Untergruppe $H$ einer endlich erzeugten Gruppe $G$ existiert. Im zweiten Kapitel wird an einige grundlegende Eigenschaften hyperbolischer Räume erinnert und durch die Erstellung eigener geometrischer Konstruktionen ergänzt. Danach werden bekannte algebraische Eigenschaften hyperbolischer Gruppen besprochen, welche die späteren Argumentationen stark vereinfachen. Im dritten Kapitel wird gezeigt, dass die relative exponentielle Wachstumsrate jeder Untergruppe jeder endlich erzeugten Gruppe $G$ bezüglich jedes endlichen Erzeugendensystems von $G$ existiert, falls sich $G$ in eine hyperbolische Gruppe einbetten lässt (vgl. Korollar 3.2.6). Zudem stellt sich heraus, dass der von mir eingeführte Begriff der Mehrdeutigkeit einer Gruppe (vgl. Definition 1.2.10), eine Invariante endlich erzeugter Gruppen liefert, welche sich in hyperbolische Gruppen einbetten lassen (vgl. Korollar 3.2.7). Im vierten Kapitel wird eine Strategie vorgestellt, mit welcher man die Existenz der relativen exponentiellen Wachstumsrate einer Untergruppe $H$ einer endlich erzeugten Gruppe $G$ bezüglich eines endlichen Erzeugendensystem $X$ nachweisen kann, indem man störende Teilmengen von $H$ entfernt. Als Anwendungsbeispiel werden zunächst hyperbolischer Gruppen betrachtet. Eine weitere Anwendung ist der Nachweis einer stabilisierenden Wirkung eines zusätzlichen freien Erzeugern auf die relative exponentielle Wachstumsrate. Genauer wird gezeigt, dass der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \beta_{H*\langle t\rangle}^{X\cup\{t\}}(n)^{\frac{1}{n}}$$

für jede Untergruppe $H$ einer beliebigen endlich erzeugten Gruppe $G$ mit endlichem Erzeugendensystem $X$ existiert (vgl. Korollar 4.3.6). Im fünften Kapitel werden Produkte hyperbolischer Gruppen auf die Existenz der relativen exponentiellen Wachstumsrate untersucht. Dabei stellt sich im Falle torsionsfreier Faktoren heraus, dass Erzeugendensysteme existieren, bezüglich derer die relative exponentielle Wachstumsrate für alle Untergruppen existiert (vgl. Korollar 5.3.3). Schließlich wird im sechsten Kapitel eine Dichotomie unter den unendlichen Untergruppen relativ hyperbolischer Gruppen aufgezeigt. Diese sind entweder zu einer Untergruppe einer parabolischen Gruppe konjugiert oder sie enthalten ein hyperbolisches Element unendlicher Ordnung. Dieses Resultat haben bereits Groves und Manning bewiesen (vgl. [GM15, Proposition 2.9]). Unabhängig davon habe ich mit elementaren Methoden gezeigt, dass unendliche Untergruppen relativ hyperbolischer Gruppen genau dann in eine parabolische Untergruppe konjugiert werden können, falls diese bezüglich der relativen Metrik beschränkt sind (vgl. Lemma 6.2.13). Die Dichotomie ergibt sich dann aus der bekannten Klassifikation azylindrischer Gruppenwirkungen auf hyperbolischen Räumen (vgl. [Osi16, Theorem 1.1]).

# Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei allen bedanken, die mich während meines Studiums unterstützt und motiviert haben.

Zunächst möchte ich meinem Betreuer, Herrn Prof. Dr. Bogopolski für die intensive Betreuung dieser Arbeit danken. Insbesondere möchte ich ihm für die Möglichkeit danken, mich im Rahmen meiner Masterarbeit mit der Fragestellung nach der Existenz der relativen exponentiellen Wachstumsrate zu beschäftigen. Ich habe die Arbeit daran stets genossen.

Meiner Familie möchte ich für ständige Unterstützung danken. Dafür, dass sie mir immer den Rücken frei gehalten hat und mir damit die Möglichkeit gab, mich auf die Anfertigung dieser Arbeit zu konzentrieren.

# Notation

- Es bezeichne $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ und $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.
- Für eine Menge $X$ sei $|X|$ ihre Kardinalität.
- Der Ausdruck *Sei $G$ eine endlich erzeugte Gruppe mit Erzeugendensystem $X$* soll immer andeuten, dass $X$ endlich ist.
- Ist $(X, d)$ ein metrischer Raum, $x \in X$ ein Punkt und $A \subset X$ eine Teilmenge, dann ist $d(x, A) := \inf_{a \in A} d(x, a)$.
- Ist $[x, y]$ eine Geodäte in einem metrischen Raum $(X, d)$, so bezeichnet $[x, y]^\delta$ die abgeschlossene $\delta$-Umgebung ihres Bildes. Falls Missverständnisse ausgeschlossen werden können, wird gelegentlich auch eine Geodäte $[x, y]$ mit ihrem Bild identifiziert.
- Ist $X$ eine Menge, so wird die freie Gruppe zur Basis $X$ mit $F(X)$ bezeichnet.
- Der Ausdruck *für fast alle* soll immer *für alle bis auf endlich viele* bedeuten.
- Ist $P(\varepsilon)$ eine mögliche Eigenschaft eines Objektes $X$, welche von einem Parameter $\varepsilon$ abhängt, so bedeutet der Ausdruck *$X$ habe die Eigenschaft $P$*, dass ein $\varepsilon$ existiert, sodass $X$ die Eigenschaft $P(\varepsilon)$ besitzt.

# Kapitel 1

# Allgemeines zur relativen exponentiellen Wachstumsrate

In diesem Kapitel werden allgemeine Resultate zur relativen exponentiellen Wachstumsrate einer Untergruppe $H$ einer endlich erzeugten Gruppe $G$ gesammelt, welche keinen Gebrauch von der algebraischen Struktur der Gruppen machen.

## 1.1 Grundbegriffe

Zunächst werden ein paar einleitende Definitionen gegeben, welche im Folgenden häufig Verwendung finden.

**Definition 1.1.1** Es seien $(X, d)$ und $(Y, d')$ zwei metrische Räume. Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt isometrische Einbettung, falls die Bedingung $d'(f(x), f(y)) = d(x, y)$ für alle $x, y \in X$ erfüllt ist.

**Definition 1.1.2** Sei $(X, d)$ ein metrischer Raum. Ein Weg in $X$ ist eine stetige Abbildung $\gamma : [0, L] \to X$. Ein solcher Weg wird Geodäte genannt, falls $\gamma$ eine isometrische Einbettung ist. Gibt es zu je zwei Punkten $x, y \in X$ immer eine Geodäte $\gamma : [0, L] \to X$ mit $\gamma(0) = x$ und $\gamma(L) = y$, so spricht man bei $(X, d)$ von einem geodätischen metrischen Raum.

Obwohl es im Allgemeinen viele Geodäten zwischen zwei Punkten $x, y \in X$ geben kann, hat es sich in dieser Arbeit als hilfreich erwiesen eine solche Geodäte mit der uneindeutigen Schreibweise $[x, y]$ zu bezeichnen. Das wichtigste Beispiel eines geodätischen metrischen Raumes wird hier der Cayleygraph einer Gruppe sein. Dieser hilft maßgeblich bei der geometrischen Intuition und ist Ausgangspunkt zahlreicher Konstruktionen der Gruppentheorie.

**Definition 1.1.3** Sei $G$ eine Gruppe und $X$ ein Erzeugendensystem von $G$. Der Cayleygraph von $G$ bezüglich $X$ ist der gerichtete Graph $\Gamma(G,X)$ mit der Knotenmenge $\Gamma(G,X)^0 = G$ und der Kantenmenge

$$\Gamma(G,X)^1 = \{(g,gx) \in G \times G \mid g \in G,\ x \in X \cup X^{-1}\}.$$

Im Folgenden soll nicht zwischen dem Graphen $\Gamma(G,X)$ und seiner kanonischen geometrischen Realisierung unterschieden werden.

Schränkt man die kanonische Metrik des Cayleygraphen (Kanten sind isometrisch isomorph zum Intervall $[0,1]$) auf die Knotenmenge ein, so erhält man offenbar die folgende algebraische Beschreibung der induzierten Metrik auf $G$.

**Definition 1.1.4** Sei $G$ eine Gruppe und $X$ ein Erzeugendensystem von $G$. Dann wird durch die Abbildung $d_X : G \times G \to \mathbb{N}_0$,

$$(g,h) \mapsto \min\{n \in \mathbb{N}_0 \mid g^{-1}h = \prod_{j=1}^{n} x_j,\ \text{für } x_j \in X \cup X^{-1} \text{ passend}\}$$

eine Metrik auf $G$ definiert. Abkürzend wird im Folgenden häufig die Schreibweise $|g|_X = d_X(1,g)$ verwendet.

Entgegen der herkömmlichen Konvention für metrische Räume, sollen hier Bälle mit endlichem Radius auch ihre Randpunke enthalten.

**Definition 1.1.5** Es sei $G$ eine Gruppe mit Erzeugendensystem $X$ und $M \subset G$ eine beliebige Teilmenge. Dann bezeichnet

$$B_M^X(n) = \{g \in M : |g|_X \leq n\}$$

den Ball um das neutrale Element mit Radius $n \in \mathbb{N}$ innerhalb von $M$. Weiter bezeichne $\beta_M^X(n) = |B_M^X(n)|$ die Kardinalität dieses Balles.

Nun kann die Folge definiert werden, deren Konvergenzverhalten in dieser Arbeit untersucht wird. Hierbei muss man sich jedoch sinnvollerweise auf endlich erzeugte Obergruppen einschränken.

**Definition 1.1.6** Es sei $G$ eine endlich erzeugte Gruppe mit Erzeugendensystem $X$ und $H \leq G$ eine beliebige Untergruppe. Die Folge $(\beta_H^X(n)^{\frac{1}{n}})_{n\in\mathbb{N}}$ wird die relative exponentielle Wachstumsfolge von $H$ in $G$ bezüglich $X$ genannt. Falls der Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_H^X(n)^{\frac{1}{n}}$ existiert, so soll im Folgenden davon gesprochen werden, dass die relative exponentielle Wachstumsrate von $H$ in $G$ bezüglich $X$ existiert.

## 1.2 Spezielle Untergruppen

Unabhängig von der Struktur der Gruppe $G$, sollen in diesem Abschnitt Klassen von Untergruppen untersucht werden, für welche die relative exponentielle Wachstumsrate immer existiert.

### 1.2.1 Schwach-quasikonvexe Untergruppen

Milnor hat gezeigt, dass der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} \beta_H^X(n)^{\frac{1}{n}}$, im Falle von $H = G$, immer existiert (vgl. [M$^+$68, S. 2]). Dies soll nun auf den Fall von schwach quasikonvexen Untergruppen verallgemeinert werden, welche eine natürliche Erweiterung der bereits häufig untersuchten quasikonvexen Untergruppen darstellen.

**Definition 1.2.1** Es sei $(X, d)$ ein geodätischer, metrischer Raum und $\varepsilon \geq 0$. Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt

- $\varepsilon$-quasikonvex, falls für je zwei Punkte $x, y \in A$ und für eine beliebige Geodäte $[x, y]$, jeder Punkt $p \in [x, y]$ in der $\varepsilon$-Umgebung eines Punktes $q \in A$ liegt.
- schwach $\varepsilon$-quasikonvex, falls zu je zwei Punkten $x, y \in A$ eine Geodäte $[x, y]$ existiert, sodass jeder Punkt $p \in [x, y]$ in der $\varepsilon$-Umgebung eines Punktes $q \in A$ liegt.

Diese Definitionen sollen nun in einen gruppentheoretischen Kontext gebracht werden.

**Definition 1.2.2** Sei $G$ eine beliebige Gruppe mit Erzeugendensystem $X$. Eine Untergruppe $H \leq G$ heißt (schwach) $\varepsilon$-quasikonvex bezüglich $X$, falls $H \subset \Gamma(G, X)$ eine (schwach) $\varepsilon$-quasikonvexe Teilmenge ist.

**Beispiele 1.2.3**

1) Ist $H \leq G$ eine Gruppe von endlichem Index, so ist $H$ offenbar quasikonvex in $G$.

2) Eine Untergruppe $H$ einer endlich erzeugten, freien Gruppe $F(X)$ ist genau dann quasikonvex bezüglich $X$, wenn sie endlich erzeugt ist [BMMS12, Korollar 6.2].

3) Die Gruppe $\langle(1,1)\rangle$ liegt schwach 1-quasikonvex in $\mathbb{Z}^2$ bezüglich $\{(1,0),(0,1)\}$. Es gibt jedoch kein $\varepsilon \geq 0$, sodass $\langle(1,1)\rangle$ eine $\varepsilon$-quasikonvexe Untergruppe in $\mathbb{Z}^2$ bezüglich $\{(1,0),(0,1)\}$ ist.

4) Es seien $G_1, \cdots, G_n$ endlich erzeugte Gruppen mit Erzeugendensystemen $X_1, \cdots, X_n$ und (schwach) quasikonvexen Untergruppen $H_i \leq G_i$ bezüglich $X_i$. Sind $\iota_i : G_i \to \prod_{j=1}^{n} G_j$ die kanonischen Einbettungen, so ist die Untergruppe $\prod_{j=1}^{n} H_j$ (schwach) quasikonvex in $\prod_{j=1}^{n} G_j$ bezüglich $X = \bigcup_{j=1}^{n} \iota_j(X_j)$.

**Lemma 1.2.4** *Es sei $G$ eine endlich erzeugte Gruppe mit Erzeugendensystem $X$ und $H \leq G$ eine schwach $\varepsilon$-quasikonvexe Untergruppe bezüglich $X$. Dann gilt*

$$\beta_H^X(m+\varepsilon)\beta_H^X(n+\varepsilon) \geq \beta_H^X(n+m), \ \forall m, n \in \mathbb{N}.$$

*Beweis.* Um das Lemma zu beweisen, reicht es eine surjektive Abbildung

$$B_H^X(m+\varepsilon) \times B_H^X(n+\varepsilon) \to B_H^X(n+m)$$

anzugeben. Hierfür genügt es offenbar jedem Element $h \in B_H^X(n+m)$ ein Paar

$$(h_1, h_2) \in B_H^X(m+\varepsilon) \times B_H^X(n+\varepsilon)$$

zuzuordnen, sodass die Gleichung $h_1 h_2 = h$ erfüllt ist. Angenommen $|h|_X \leq m$. Dann kann $h_1 = h$ und $h_2 = 1$ gewählt werden. Es kann also $|h|_X > m$ angenommen werden. Schreibe daher $|h|_X = m + d$ mit $0 < d \leq n$. Dann gibt es nach Voraussetzung ein $h_1 \in H$ mit $d_X(h_1, [1,h](m)) \leq \varepsilon$. und $h_2 = h_1^{-1}h$. Da $[1,h]$ eine Geodäte ist, gilt weiter

$$d_X(1, h_1) \leq d_X(1, [1,h](m)) + d_X([1,h](m), h_1) \leq m + \varepsilon.$$

Damit liegt also $h_1$ im Ball $B_H^X(m+\varepsilon)$. Schließlich gilt

$$\begin{aligned} d_X(1, h_2) \quad &= d_X(1, h_1^{-1}h) && = d_X(h_1, h) \\ &\leq d_X(h_1, [1,h](m)) + d_X([1,h](m), h) && \leq \varepsilon + d_X(1,h) - m \\ &= \varepsilon + m + d - m && = \varepsilon + d \\ &\leq \varepsilon + n. \end{aligned}$$

Damit liegt $h_2$ in dem Ball $B_H^X(n+\varepsilon)$.

□

Um Lemma 1.2.4 für die Existenz der relativen exponentiellen Wachstumsrate schwach $\varepsilon$-quasikonvexer Untergruppen einzusetzen, fehlt nur noch die folgende rein-analytische Aussage. Diese ist eine Variante eines Teiles der Argumentation des Beweises von Lemma 1.6 aus [Ols13].

**Satz 1.2.5** *Es sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine monoton wachsende Funktion, sodass ein $B \geq 0$ existiert mit $f(n) \leq B^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Angenommen es gibt ein $d \in \mathbb{N}_0$, sodass die Eigenschaft $f(m+d)f(n+d) \geq f(m+n)$ für jedes Paar $m, n \in \mathbb{N}$ gilt. Dann existiert der Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} f(n)^{\frac{1}{n}}$.*

*Beweis.* Zunächst implizieren die Abschätzungen $1 \leq f(n) \leq B^n$, dass die Folge $(f(n)^{\frac{1}{n}})_{n\in\mathbb{N}}$ nach oben und unten beschränkt ist. Daher kann $a := \liminf\limits_{n\to\infty} f(n)^{\frac{1}{n}} \in \mathbb{R}$ definiert werden. Sei nun $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Wegen $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n-2d} = 1$ gibt es ein $n_0 > 2d$, sodass für alle $n \geq n_0$ die beiden Ungleichungen

$$f(n)^{\frac{1}{n}} \leq a + \tfrac{\varepsilon}{3} \text{ und } (a + \tfrac{\varepsilon}{3})^{\frac{n}{n-2d}} \leq (a + \tfrac{\varepsilon}{3}) + \tfrac{\varepsilon}{3}$$

erfüllt sind. Sei nun $n \geq n_0$ fixiert. Nun kann jedes $N \in \mathbb{N}$ in der Form $N = m(n-2d) + r$ mit $m, r \in \mathbb{N}_0$, $r < n - 2d$ dargestellt werden und man erhält insgesamt die folgenden Ungleichungen.

$$\begin{aligned}
f(N) &= f(m(n-2d)+r) && \leq f((m+1)(n-2d)) \\
&= f((m(n-2d)-d)+(n-d)) && \leq f(m(n-2d))f(n) \\
&\leq f((m-1)(n-2d))f(n)^2 && \leq f((m-2)(n-2d))f(n)^3 \\
&\vdots && \\
&\leq f((m-(m-1))(n-2d))f(n)^m && = f(n-2d)f(n)^m \\
&\leq f(n)^{m+1}.
\end{aligned}$$

Für jedes $N > n$ ergibt sich somit

$$
\begin{array}{ll}
f(N)^{\frac{1}{N}} & = f(m(n-2d)+r)^{\frac{1}{m(n-2d)+r}} \\
\leq (f(n)^{m+1})^{\frac{1}{m(n-2d)+r}} & \leq f(n)^{\frac{m+1}{m(n-2d)}} \\
\leq f(n)^{\frac{1}{n-2d}+\frac{1}{m(n-2d)}} & \leq ((a+\frac{\varepsilon}{3})^n)^{\frac{1}{(n-2d)}}((a+\frac{\varepsilon}{3})^n)^{\frac{1}{m(n-2d)}} \\
\leq (a+\frac{\varepsilon}{3})^{\frac{n}{(n-2d)}}(a+\frac{\varepsilon}{3})^{\frac{n}{m(n-2d)}} & \leq (a+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3})(a+\frac{\varepsilon}{3})^{\frac{n}{m(n-2d)}}.
\end{array}
$$

Wegen $\lim\limits_{m\to\infty} \frac{n}{m(n-2d)} = 0$ erhält man zudem

$$\lim_{m\to\infty}(a+\tfrac{2\varepsilon}{3})(a+\tfrac{\varepsilon}{3})^{\frac{n}{m(n-2d)}} = (a+\tfrac{2\varepsilon}{3})(a+\tfrac{\varepsilon}{3})^0 = a+\tfrac{2\varepsilon}{3}.$$

Damit gilt also

$$(a+\tfrac{2\varepsilon}{3})(a+\tfrac{\varepsilon}{3})^{\frac{n}{m(n-2d)}} \leq a+\tfrac{2\varepsilon}{3}+\tfrac{\varepsilon}{3} = a+\varepsilon$$

für fast alle $m \in \mathbb{N}$. Insgesamt folgt damit $f(N)^{\frac{1}{N}} \leq a+\varepsilon$ für fast alle $N \in \mathbb{N}$. Per Definition ist also $\limsup\limits_{n\to\infty} f(n)^{\frac{1}{n}} \leq a+\varepsilon$. Da $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt worden ist, folgt $\liminf\limits_{n\to\infty} f(n)^{\frac{1}{n}} = \limsup\limits_{n\to\infty} f(n)^{\frac{1}{n}}$. Bekanntermaßen existiert in diesem Fall der Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} f(n)^{\frac{1}{n}}$.

□

Als direktes Korollar aus Lemma 1.2.4 und Satz 1.2.5 erhält man nun die Existenz der relativen exponentiellen Wachstumsrate für schwach $\varepsilon$-quasikonvexe Untergruppen.

**Korollar 1.2.6** *Es sei $G$ eine endlich erzeugte Gruppe mit Erzeugendensystem $X$. Dann existiert der Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_H^X(n)^{\frac{1}{n}}$ für jede schwach $\varepsilon$-quasikonvexe Untergruppe $H$ von $G$.*

### 1.2.2 Verzerrte Untergruppen

Schränkt man sich bei der Untersuchung der Existenz der relativen exponentiellen Wachstumsrate auf endlich erzeugte Untergruppen ein, so kann man oft die Verzerrung der Untergruppe nutzen um die Existenz der Wachstumsrate nachzuweisen. Eine Motivation Verzerrungen von Untergruppen zu studieren, ist deren Zusammenhang zum verallgemeinerten Wortproblem, welches bei einer gegebenen Inklusion $H \leq G$ fragt, ob ein Wort in den Erzeugern von

$G$ ein Element in $H$ repräsentiert. Farb hat bewiesen, dass für eine Gruppe $G$ mit lösbarem Wortproblem, das verallgemeinerte Wortproblem für eine endlich erzeugte Untergruppe $H$ genau dann lösbar ist, wenn die Verzerrung von $H$ in $G$ durch eine rekursive Funktion beschränkt ist [Far94, Proposition 2.1].

**Definition 1.2.7** Eine Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ heiße

- sublinear, falls $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(n)}{n} = 0$ gilt.
- subexponentiell, falls jedes $a > 1$ die Bedingung $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(n)}{a^n} = 0$ erfüllt.

**Definition 1.2.8** (vgl. [DO12, Definition 1.2]). Es sei $G$ eine endlich erzeugte Gruppe mit Erzeugendensystem $X$ und $H$ eine endlich erzeugte Untergruppe mit Erzeugendensystem $Y$. Die Verzerrungsfunktion von $H$ in $G$ lautet

$$\Delta_H^G(n) : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0,\ n \mapsto \max\{|h|_Y : h \in H,\ |h|_X \leq n\}.$$

Entsprechend heißt eine Untergruppe $H$ linear bzw. polynomiell bzw. subexponentiell verzerrt, falls $\Delta_H^G(n)$ durch eine lineare bzw. polynomielle bzw. subexponentielle Funktion nach oben beschränkt ist. In dem Fall, dass $H$ linear verzerrt ist, sagt man auch, dass $H$ eine unverzerrte Untergruppe von $G$ ist.

**Bemerkung 1.2.9** Die Funktion $\Delta_H^G(n)$ ist monoton wachsend.

Man sieht leicht, dass lineare bzw. polynomielle bzw. subexponentielle Verzerrung nicht von der Wahl der endlichen Erzeugendensysteme von $H$ und $G$ abhängt. Eine bereits häufig untersuchte Klasse von Untergruppen sind die mit linear beschränkter Verzerrungsfunktion. Im Folgenden wird die Existenz der relativen exponentiellen Wachstumsrate für die wesentlich größere Klasse der Untergruppen mit subexponentieller Verzerrung untersucht werden. Um diese Eigenschaft nutzen zu können wird sie mit dem Begriff der Mehrdeutigkeit einer Gruppe verbunden. Dieser misst im Wesentlichen, wie viele Darstellungen ein Element $g \in B_G^X(m+n+C)$ als Produkt von Elementen aus $B_G^X(m)$ und $B_G^X(n)$ hat, wenn man mögliche Zwischenstücke erlaubt.

**Definition 1.2.10** Sei $G$ eine endlich erzeugte Gruppe mit Erzeugendensystem $X$. Eine Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ist eine Mehrdeutigkeitsfunktion von $G$ bezüglich $X$, falls eine endliche Menge $M \subset G$ und eine Abbildung der Form

$$\phi : G \times G \to G,\ (u, v) \mapsto u g_{u,v} v$$

mit $g_{u,v} \in M$ existiert, sodass mit $C := \max_{g \in M} |g|_X$ die folgende Eigenschaft erfüllt ist.

- Für alle $m, n \in \mathbb{N}$ und alle Einschränkungen

  $$\phi_{m,n} : B_G^X(m) \times B_G^X(n) \to B_G^X(m+n+C),\ (u,v) \mapsto \phi((u,v)),$$

  ist die Größe jedes Urbildes $\phi_{m,n}^{-1}(z)$ mit $z \in B_G^X(m+n+C)$, durch $f(n)$ beschränkt.

Eine endlich erzeugte Gruppe $G$ mit Erzeugendensystem $X$ heiße linear bzw. polynomiell bzw. subexponentiell mehrdeutig bezüglich $X$, falls eine Mehrdeutigkeitsfunktion von $G$ bezüglich $X$ existiert, welche durch eine lineare bzw. polynomielle bzw. subexponentielle Funktion nach oben beschränkt ist.

**Bemerkung 1.2.11** *Seien $X$ und $Y$ zwei Mengen und $f : X \to Y$ eine Funktion, sodass die Größe jedes Urbildes $f^{-1}(y)$ mit $y \in Y$, durch eine Konstante $n \in \mathbb{N}$ beschränkt ist. Dann gilt $|X| \leq n|Y|$.*

**Bemerkung 1.2.12** *Es sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine subexponentielle Funktion und $P : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine Funktion, welche durch eine polynomielle Abbildung beschränkt ist. Dann ist auch die Verknüpfung $P \circ f$ subexponentiell.*

*Beweis.* Nach Voraussetzung gibt es eine polynomielle Abbildung $Q(x) = \sum_{i=0}^{d} a_i x^i$ mit der Eigenschaft $Q(n) \geq P(n),\ \forall n \in \mathbb{N}$. Sei $M \geq 0$ so groß, dass $M + Mx^d \geq |Q(x)|$ für jedes $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ gilt. Dann ist für $a > 1$ auch $\widehat{a} := a^{\frac{1}{d}} > 1$ und man erhält nach Voraussetzung

$$\lim_{n\to\infty} \tfrac{|P(f(n))|}{a^n} \leq \lim_{n\to\infty} \tfrac{M+Mf(n)^d}{a^n} \leq \lim_{n\to\infty} \tfrac{M}{a^n} + \tfrac{Mf(n)^d}{a^n} = M(\lim_{n\to\infty} \tfrac{f(n)}{\widehat{a}^n})^d = 0.$$

Also ist auch $\lim_{n\to\infty} \frac{P(f(n))}{a^n} = 0$.

□

**Satz 1.2.13** *Es sei $G$ eine endlich erzeugte Gruppe mit Erzeugendensystem $X$ und $H \leq G$ eine endlich erzeugte, subexponentiell verzerrte Untergruppe mit Erzeugendensystem $Y$. Angenommen $H$ ist polynomiell mehrdeutig bezüglich $Y$. Dann existiert eine subexponentielle Funktion $\varepsilon : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ und eine Konstante $C \in \mathbb{N}_0$, sodass für alle $m, n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung*

$$\beta_H^X(m)\beta_H^X(n) \leq \varepsilon(n) \cdot \beta_H^X(m+n+C)$$

*erfüllt ist.*

*Beweis.* Zunächst sei $f$ eine subexponentielle Verzerrungsfunktion von $H$ in $G$. Dann ist die Inklusion

$$\iota : B_H^X(m) \times B_H^X(n) \to B_H^Y(f(m)) \times B_H^Y(f(n))$$

wohldefiniert. Sei $P$ eine Mehrdeutigkeitsfunktion von $H$ bezüglich $Y$, welche durch eine polynomielle Funktion beschränkt ist. Es seien weiter $\phi$ bzw. $M$, die zu $P$ gehörige Abbildung bzw. Menge aus Definition 1.2.10. Setzt man also $\widehat{C} = \max_{h\in M} |h|_Y$, so ist für jedes Paar $(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ und jedes $z \in B_H^Y(m+n+\widehat{C})$, die Größe des Urbildes von $z$, bezüglich der Abbildung

$$\phi_{m,n} : B_H^Y(m) \times B_H^Y(n) \to B_H^Y(m+n+\widehat{C}),\ (u,v) \mapsto \phi((u,v)) = ug_{u,v}v,$$

durch $P(n)$ beschränkt. Insbesondere erhält man für alle $(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ und alle $z \in B_H^Y(f(m)+f(n)+\widehat{C})$ die Abschätzung $|\phi^{-1}_{f(m),f(n)}(z)| \leq P(f(n))$. Für

$$\psi_{m,n} := \phi_{f(m),f(n)} \circ \iota : B_H^X(m) \times B_H^X(n) \to B_H^Y(f(m)+f(n)+\widehat{C})$$

gilt daher

$$\begin{aligned} |\psi^{-1}(z)| &= |(\phi_{f(m),f(n)} \circ \iota)^{-1}(z)| \\ &= |\iota^{-1}(\phi^{-1}_{f(m),f(n)}(z))| \quad \leq |\phi^{-1}_{f(m),f(n)}(z)| \leq P(f(n)). \end{aligned}$$

Setzt man nun $C = \max_{h\in M} |h|_X$, so erhält man aus der Definition von $\phi$ die Inklusion

$$\tau_{m,n} : \psi_{m,n}(B_H^X(m) \times B_H^X(n)) \subset B_H^X(m+n+C).$$

Die Größe der Urbilder einzelner Elemente bezüglich der Abbildung

$$\tau_{m,n} \circ \psi_{m,n} : B_H^X(m) \times B_H^X(n) \to B_H^X(m+n+C)$$

ist daher durch die Funktion $\varepsilon(n) := P \circ f(n)$ beschränkt. Nach Bemerkung 1.2.12 ist diese subexponentiell. Die gewünschten Ungleichungen erhält man nun sofort mit Bemerkung 1.2.11.

$\square$

Ist wiederum die Mehrdeutigkeitsfunktion $f$ subexponentiell und die Verzerrung $g$ polynomiell, so ist deren Verknüpfung $\varepsilon = f \circ g$ im Allgemeinen nicht mehr subexponentiell. Man betrachte hierfür zum Beispiel $f(n) = 2^{\sqrt{n}}$ und $g(n) = n^2$. Wenn man jedoch fordert, dass die Untergruppe unverzerrt ist, dann erhält man ein Analogon zu Satz 1.2.13.

**Bemerkung 1.2.14** *Es sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine subexponentielle Funktion und $L : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine Funktion, welche durch eine lineare Funktion beschränkt ist. Dann ist auch die Verknüpfung $f \circ L$ subexponentiell.*

*Beweis.* Nach Voraussetzung gibt es eine lineare Abbildung $Q(x) = ax + b$ mit der Eigenschaft $Q(n) \geq L(n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Sei $M \in \mathbb{N}$ so groß, dass $Mx \geq |ax+b|$ für jedes $x \in \mathbb{R}_{\geq 1}$ gilt. Sei nun $a > 1$ dann ist auch $\widehat{a} := a^{\frac{1}{M}} > 1$ und damit $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(n)}{\widehat{a}^n} = 0$. Insbesondere gilt auch $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(Mn)}{\widehat{a}^{Mn}} = 0$ und man erhält insgesamt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|f(L(n))|}{a^n} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{|f(Mn)|}{a^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{f(Mn)}{\widehat{a}^{Mn}} = 0.$$

Also ist auch $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(L(n))}{a^n} = 0$.

$\square$

**Satz 1.2.15** *Es sei $G$ eine endlich erzeugte Gruppe und $H \leq G$ eine endlich erzeugte, unverzerrte Untergruppe. Angenommen $H$ besitzt eine subexponentielle Mehrdeutigkeitsfunktion. Dann existiert eine subexponentielle Funktion $\varepsilon : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ und eine Konstante $C \geq 0$, sodass die Ungleichung*

$$\beta_H^X(m)\beta_H^X(n) \leq \varepsilon(n) \cdot \beta_H^X(m+n+C)$$

*für alle $m, n \in \mathbb{N}$ erfüllt ist.*

*Beweis.* Dies ist im Wesentlichen der gleiche Beweis wie von Satz 1.2.13. Man muss in der Argumentation lediglich Bemerkung 1.2.12 durch Bemerkung 1.2.14 ersetzen.

$\square$

Wegen der einfacheren Anwendbarkeit, wird nun die Definition vom subexponentiellen Wachstum durch eine äquivalente Definition ersetzt.

**Lemma 1.2.16** Eine Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ist genau dann subexponentiell, wenn die Bedingung $\lim\limits_{n\to\infty} f(n)^{\frac{1}{n}} = 1$ erfüllt ist.

*Beweis.* Angenommen $f$ ist subexponentiell. Dann gilt also für jedes $a > 1$, jedes $\varepsilon > 0$ und für fast alle $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung $\frac{f(n)}{a^n} \leq \varepsilon$ bzw. $f(n) \leq a^n\varepsilon$. Damit erhält man $f(n)^{\frac{1}{n}} \leq (a^n\varepsilon)^{\frac{1}{n}} \leq a + \varepsilon$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$. Da $a > 1$ und $\varepsilon > 0$ beliebig waren folgt nun $\lim\limits_{n\to\infty} f(n)^{\frac{1}{n}} = 1$. Hat man andererseits $\lim\limits_{n\to\infty} f(n)^{\frac{1}{n}} = 1$ gegeben, so erhält man für jedes $\varepsilon > 0$ und für fast alle $n \in \mathbb{N}$ die Bedingung $f(n) \leq (1+\varepsilon)^n$. Es sei nun $\delta > 0$ und $a = 1 + \delta > 1$. Wählt man speziell $\varepsilon = \frac{\delta}{2}$, so erhält man

$$\limsup_{n\to\infty} \tfrac{f(n)}{a^n} \leq \limsup_{n\to\infty} \tfrac{(1+\varepsilon)^n}{a^n} = \limsup_{n\to\infty} (\tfrac{1+\frac{\delta}{2}}{1+\delta})^n = 0.$$

Wegen $f(n) > 0$ folgt damit $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(n)}{a^n} = 0$.

□

Die entscheidende analytische Zutat zum Nachweis der Existenz einiger relativer exponentieller Wachstumsraten wird mit dem folgenden Satz bereitgestellt. Der Beweis orientiert sich an einem Teil des Beweises von Lemma 1.6 aus [Ols13].

**Satz 1.2.17** *Es seien $B, C > 0$ reelle Zahlen, $\varepsilon(n) : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine subexponentielle Funktion und $l : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine sublineare Funktion. Ist $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine Funktion mit den Eigenschaften*

1) *$f(m)f(n) \leq \varepsilon(n)f(m+n+l(n))$ für alle $n \geq C$ und alle $m \in \mathbb{N}$ und*

2) *$1 \leq f(n) \leq B^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$,*

*so existiert der Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} f(n)^{\frac{1}{n}}$.*

*Beweis.* Zunächst existiert $\limsup\limits_{n\to\infty} f(n)^{\frac{1}{n}}$ aufgrund der zweiten Eigenschaft von $f$. Ohne Einschränkung kann daher $\limsup\limits_{n\to\infty} f(n)^{\frac{1}{n}} = a > 1$ angenommen werden, da im Falle von $a = 1$ wegen $f(n)^{\frac{1}{n}} \geq 1$ auch $\liminf\limits_{n\to\infty} f(n)^{\frac{1}{n}} = 1$ gilt. Sei also $\delta \in (0, a-1)$ und setze $a_n := f(n)^{\frac{1}{n}}$. Nach Lemma 1.2.16 gilt $\lim\limits_{s\to\infty} \varepsilon(s)^{\frac{1}{s}} = 1$ also auch $\lim\limits_{s\to\infty} \varepsilon(s)^{\frac{-1}{s}} = 1$. Da $l$ sublinear ist, gilt weiter

$$\lim_{s\to\infty} \tfrac{s+l(s)}{s} = \lim_{s\to\infty} \tfrac{s}{s} + \tfrac{l(s)}{s} = \lim_{s\to\infty} 1 + 0 = 1.$$

Es gibt also ein $s \geq C$, sodass

$$|a_s \varepsilon(s)^{\frac{-1}{s}} - a| \leq \tfrac{\delta}{3} \text{ und } (a - \tfrac{2\delta}{3})^{\frac{s+l(s)}{s}} < a - \tfrac{\delta}{3}$$

gelten. Nun kann jede natürliche Zahl $n$ als $q(s+l(s))+r$ mit $r < s+l(s)$ und $q \in \mathbb{N}_0$ dargestellt werden. Für großes $n$ hat man offenbar $(a - \frac{2\delta}{3})^{n-s-l(s)} > (a-\delta)^n$. Da $f$ monoton steigend ist hat man insgesamt

$$\begin{aligned}
f(n) \quad &\geq f(q(s+l(s))) \quad &&\geq \varepsilon(s)^{-1} f(s) f((q-1)(s+l(s))) \\
&\geq \dots &&\geq \varepsilon(s)^{-q+1} f(s)^{q-1} f(s+l(s)) \\
&\geq \varepsilon(s)^{-q} f(s)^q.
\end{aligned}$$

Mit der Gleichung $\varepsilon(s)^{-q} f(s)^q = (\varepsilon(s)^{\frac{-1}{s}} a_s)^{sq}$ ergibt sich

$$\begin{aligned} f(n) &\geq (a_s \varepsilon(s)^{\frac{-1}{s}})^{sq} &&\geq (a - \frac{\delta}{3})^{sq} &&\geq (a - \frac{2\delta}{3})^{(s+l(s))q} \\ &= (a - \frac{2\delta}{3})^{n-r} &&> (a - \frac{2\delta}{3})^{n-s-l(s)} &&> (a-\delta)^n. \end{aligned}$$

Insgesamt erhält man $a_n > a - \delta$ ab einem genügend großen $n$. Da $\delta$ beliebig klein gewählt werden durfte, folgt damit die Aussage.

□

Aus Satz 1.2.17 und den beiden Sätzen 1.2.13 und 1.2.15 ergeben sich jetzt sofort die beiden folgenden Korollare, welche später für den Nachweis der Existenz einiger relativer exponentieller Wachstumsraten genutzt werden.

**Korollar 1.2.18** *Es sei $G$ eine endlich erzeugte Gruppe und $H \leq G$ eine endlich erzeugte, subexponentiell verzerrte Untergruppe. Angenommen $H$ besitzt eine polynomielle Mehrdeutigkeitsfunktion. Dann existiert die relative exponentielle Wachstumsrate von $H$ in $G$ für jedes endliche Erzeugendensystem von $G$.*

Es wäre interessant zu wissen, ob es überhaupt unverzerrte Untergruppen gibt, für welche die relative exponentielle Wachstumsrate nicht existiert. Das folgende Korollar gibt zumindest eine Obstruktion für diesen Fall.

**Korollar 1.2.19** *Es sei $G$ eine endlich erzeugte Gruppe und $H \leq G$ eine endlich erzeugte, unverzerrte Untergruppe. Angenommen $H$ besitzt eine subexponentielle Mehrdeutigkeitsfunktion. Dann existiert die relative exponentielle Wachstumsrate von $H$ in $G$ für jedes endliche Erzeugendensystem von $G$.*

### 1.2.3 Konjugation und Kommensurabiltät

In diesem Abschnitt wird gezeigt, dass die relative exponentielle Wachstumsrate invariant unter Konjugation und Übergang zu Untergruppen vom endlichen Index ist.

**Lemma 1.2.20** *Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge natürlicher Zahlen, $d \in \mathbb{Z}$ beliebig und $c > 0$. Dann existiert der Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ genau dann, wenn der Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{ca_{n+d}}$ existiert. In diesem Fall gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{ca_{n+d}}$.*

*Beweis.* Angenommen der Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} =: a$ existiert. Dann ist für $\varepsilon > 0$ die Ungleichung $|a - \sqrt[n]{a_n}| \leq \varepsilon$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllt. Es kann also $\sqrt[n]{a_n} = (a+\delta_n)$ bzw. $a_n = (a+\delta_n)^n$, mit $\delta_n \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ passend gewählt, geschrieben werden. Nun konvergiert $(c(a \pm \varepsilon)^{n+d})^{\frac{1}{n}}$ offenbar gegen $a \pm \varepsilon$. Damit gilt $(c(a+\delta_n)^{n+d})^{\frac{1}{n}} \in [a-\varepsilon, a+\varepsilon]$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$. Insgesamt gilt dann

$$|\sqrt[n]{ca_{n+d}} - a| = |(c(a+\delta_{n+d})^{n+d})^{\frac{1}{n}} - a| \leq \varepsilon$$

für fast alle $n \in \mathbb{N}$. Da $d \in \mathbb{Z}$ und $c > 0$ beliebig waren, folgt die Rückrichtung bei der Wahl von neuen Konstanten der Form $d' = -d$ und $c' = \frac{1}{c}$.

□

Es ist noch unklar, ob die Existenz der relativen exponentiellen Wachstumsrate $\lim_{n\to\infty} \beta_H^X(n)^{\frac{1}{n}}$ vom Erzeugendensystem $X$ abhängt. Eine speziellere Frage ist, ob die Existenz invariant unter allen Automorphismen ist. Zumindest für Automorphismen, welche die Wortlänge kaum ändern, ist dies der Fall.

**Lemma 1.2.21** *Es sei $G$ eine endlich erzeugte Gruppe mit Erzeugendensystem $X$ und $H \leq G$ eine Untergruppe, für welche die exponentielle Wachstumsrate bezüglich $X$ existiert. Ist $\alpha \in Aut(G)$ ein Automorphismus, sodass eine Konstante $C \in \mathbb{N}_0$ mit*

$$|\alpha(h)|_X \leq |h|_X + C \text{ und } |\alpha^{-1}(h)|_X \leq |h|_X + C \ \forall h \in H$$

*existiert, dann existiert die relative exponentielle Wachstumsrate von $\alpha(H)$ in $G$ bezüglich $X$ und stimmt mit der relativen exponentiellen Wachstumsrate von $H$ überein.*

*Beweis.* Durch Anwendung von $\alpha$ und $\alpha^{-1}$ erhält man nach Voraussetzung die Injektionen

$$B_H^X(n-C) \to B_{\alpha(H)}^X(n) \to B_H^X(n+C).$$

Insbesondere gilt

$$\beta_H^X(n-C) \leq \beta_{\alpha(H)}^X(n) \leq \beta_H^X(n+C)$$

und damit

$$\beta_H^X(n-C)^{\frac{1}{n}} \leq \beta_{\alpha(H)}^X(n)^{\frac{1}{n}} \leq \beta_H^X(n+C)^{\frac{1}{n}}.$$

Nach Lemma 1.2.20 konvergieren die Folgen $(\beta_H^X(n-C)^{\frac{1}{n}})_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\beta_H^X(n+C)^{\frac{1}{n}})_{n\in\mathbb{N}}$ jeweils gegen $a = \beta_H^X(n)^{\frac{1}{n}}$. Damit folgt die Behauptung aus dem Einschnürungssatz.

□

Wählt man ein $g \in G$ und setzt $C = |g|_X$, so gilt offenbar für jedes $h \in H$ die Abschätzung $|ghg^{-1}|_X \leq |h|_X + 2C$. Aus Lemma 1.2.21 ergibt sich also sofort die Konjugationsinvarianz des Grenzwertes.

**Korollar 1.2.22** *Es sei $G$ eine endlich erzeugte Gruppe mit Erzeugendensystem $X$ und $H \leq G$ eine Untergruppe, für welche die relative exponentielle Wachstumsrate bezüglich $X$ existiert. Dann gilt für jedes $g \in G$, dass die relative exponentielle Wachstumsrate von $gHg^{-1}$ in $G$ bezüglich $X$ existiert und mit der relativen exponentiellen Wachstumsrate von $H$ in $G$ übereinstimmt.*

**Definition 1.2.23** Sei $G$ eine beliebige Gruppe. Zwei Untergruppe $H, K \leq G$ heißen kommensurabel, falls der Schnitt $H \cap K$ jeweils endlichen Index in $H$ und $K$ hat.

**Lemma 1.2.24** *Es sei $G$ eine endlich erzeugte Gruppe mit Erzeugendensystem $X$. Seien $H, K \leq G$ kommensurable Untergruppen von $G$. Dann existiert die relative exponentielle Wachstumsrate genau dann für $H$, wenn sie für $K$ existiert. In diesem Fall stimmen die beiden Wachstumsraten überein.*

*Beweis.* Offenbar reicht es den Fall zu betrachten, dass $H$ eine Untergruppe von endlichen Index in $K$ ist. Wähle hierfür eine Zerlegung $K = \bigcup_{j=1}^{m} Hk_j$ in Rechtsnebenklassen. Dann erhält man für $C = \max_{1\leq j\leq m} |k_j|_X$ wohldefinierte, injektive Abbildungen

$$B^X_{Hk_j}(n) \to B^X_H(n+C),\ g \mapsto gk_j^{-1},$$

und man erhält $\beta^X_{Hk_j}(n) \leq \beta^X_H(n+C)$, wodurch sich die Abschätzungen

$$\beta^X_H(n) \leq \beta^X_K(n) = \sum_{j=1}^{m} \beta^X_{Hk_j}(n) \leq m\beta^X_H(n+C)$$

ergeben. Mit Lemma 1.2.20 folgt jedoch aus der Existenz des Grenzwerts $\lim_{n\to\infty} \beta^X_H(n)^{\frac{1}{n}}$ auch die Existenz des Grenzwerts $\lim_{n\to\infty} (m\beta^X_H(n+C))^{\frac{1}{n}}$ und deren Gleichheit $\lim_{n\to\infty} \beta^X_H(n)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} (m\beta^X_H(n+C))^{\frac{1}{n}}$. Somit ergibt sich die Existenz des Grenzwerts $\lim_{n\to\infty} \beta^X_K(n)^{\frac{1}{n}}$ aus dem Einschnürungssatz. Betrachtet man nun

$$\tfrac{1}{m}\beta^X_K(n-C) \leq \beta^X_H(n) \leq \beta^X_K(n),$$

so ergibt sich die Rückrichtung analog.

□

Ist $G$ eine endliche erzeugten Gruppe mit endlichem Erzeugendensystem $X$ und $H$ eine Untergruppe von $G$, so kann die relative exponentielle Wachstumsrate $\lim_{n\to\infty} \beta_H^X(n)$ von $H$ mit der exponentielle Wachstumsrate $\lim_{n\to\infty} \beta_G^X(n)$ der Gruppe $G$ auch dann übereinstimmen, wenn $H$ eine unendlichen Index in $G$ hat. Man betrachte hierfür zum Beispiel $H := F(X) < F(X) \times \mathbb{Z} =: G$. Es wäre interessanter Gruppen zu finden, wo dies niemals passieren kann. In freien Gruppen ist dies zumindest dann der Fall, wenn man die Wachstumsrate der freien Obergruppe mit der einer endlich erzeugten Untergruppe vergleicht:

**Theorem 1.2.25** (vgl. [Gru14, Theorem 5.3]). *Es sei $X$ eine endliche Menge der Größe mindestens 2 und $H < F(X)$ eine endlich erzeugte Untergruppe vom unendlichen Index in $F(X)$. Dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \beta_H^X(n)^{\frac{1}{n}} < \lim_{n\to\infty} \beta_{F(X)}^X(n)^{\frac{1}{n}} = 2|X| - 1.$$

# Kapitel 2

# Hyperbolische Räume

Hyperbolische Gruppen sind allein dadurch charakterisiert, dass ihr Cayleygraph ein hyperbolischer metrischer Raum ist. Um diese Eigenschaft besser nutzen zu können werden in diesem Kapitel einige grundlegende Eigenschaften dieser Räume bereitgestellt werden. Hierbei orientiere ich mich an [BH99, III.H].

## 2.1 Grundlagen

Zunächst sei an das Gromov-Produkt erinnert, welches misst, wie lange zwei Geodäten mit gemeinsamen Startpunkt beieinander bleiben.

**Definition 2.1.1** Für einen metrischen Raum $(X, d)$ und drei Punkten $o, x, y \in X$ ist das Gromov-Produkt durch

$$(x.y)_o = \frac{1}{2}(d(x, o) + d(y, o) - d(x, y))$$

definiert.

Sind nun $o, x, y, z$ Punkte eines Baumes $T$, sodass der gemeinsame Teilpfad der beiden Geodäten $[o, x]$ und $[o, z]$ länger ist als der, der beiden Geodäten $[o, x]$ und $[o, y]$, so folgt aus der Eindeutigkeit der Geodäte zwischen zwei Punkten eines Baumes, dass der gemeinsame Teilpfad der beiden Geodäten $[o, x]$ und $[o, y]$ nicht größer ist als der, der beiden Geodäten $[o, y]$ und $[o, z]$. Man erhält also die Ungleichung

$$(x.y)_o \geq \min\{(x.z)_o, (z.y)_o\}.$$

Schwächt man diese Definition ein wenig ab, indem man einen festen Fehler erlaubt, so erhält man Gromov's ursprüngliche Definition hyperbolischer Räume (vgl. [Gro87, 1.1.C]):

**Definition 2.1.2** (Gromov) Sei $\delta \geq 0$. Ein metrischer Raum $(X, d)$ heißt $\delta$-hyperbolisch, falls zu je vier Punkten $o, x, y, z \in X$ die Ungleichung

$$(x.y)_o \geq \min((x.z)_o, (z.y)_o) - \delta$$

erfüllt ist.

Eine äquivalente Beschreibung hyperbolischer Räume wird Rips zugeschrieben. Auch hier sieht man sofort, dass Bäume die 0-hyperbolischen Räume sind.

**Definition 2.1.3** (Rips) Ein metrischer Raum $(X, d)$ ist genau dann hyperbolisch, wenn ein $\delta \geq 0$ existiert, sodass für jedes Dreieck in $(X, d)$ mit geodätischen Kanten, jeweils eine Kante in der $\delta$-Umgebung der anderen beiden Kanten liegt.

**Proposition 2.1.4** (vgl. [BH99, III.H.1.22]). *Die Definitionen von Gromov und Rips sind äquivalent.*

Da man in beiden Definitionen die Konstante $\delta$ durch eine größere ersetzen kann, ohne dass die definierende Eigenschaft verletzt wird, wird im Folgenden angenommen, dass $\delta$ so groß ist, dass jeweils beide Definitionen für das gleiche $\delta$ erfüllt sind. Um einige Argumente zu vereinfachen wird zudem angenommen, dass $\delta$ ganzzahlig ist.

Ein Leitmotiv bei der Untersuchung hyperbolischer Räume ist, dass der geodätische Abschluss endlicher Mengen wie ein Baum aussieht. Das folgende Theorem bietet eine Möglichkeit dies zu präzisieren.

**Theorem 2.1.5** (vgl. [GdLH90, 2.12]). *Sei $(X, d)$ ein endlicher $\delta$-hyperbolischer Raum der Größe $|X| \leq 2^k + 2$ und $w \in X$ ein beliebiger Punkt. Dann existiert ein metrischer Baum $T$ und eine Abbildung $\Phi : X \to T$, sodass die Bedingungen*

1) $d(x, w) = d(\Phi(x), \Phi(w)\ \forall x \in X$ *und*

2) $d(x, y) - 2k\delta \leq d(\Phi(x), \Phi(y)) \leq d(x, y)\ \forall x, y \in X$

*erfüllt sind.*

**Definition 2.1.6** (vgl. [BH99, I.8.22]). Sei $(X, d)$ ein metrischer Raum und $I \subset \mathbb{R}$ ein, nicht notwendigerweise beschränktes, Intervall. Es seien $\lambda \geq 1$ und $\varepsilon \geq 0$. Eine Abbildung $c : I \to X$ heißt $(\lambda, \varepsilon)$-Quasigeodäte, falls die Ungleichungen

$$\tfrac{1}{\lambda}|t'-t|-\varepsilon \le d(c(t'),c(t)) \le \lambda|t'-t|+\varepsilon$$

für alle $t',t \in I$ erfüllt sind. Wahlweise kann hier $I$ durch $I \cap \mathbb{Z}$ ersetzt werden.

Um zwei Teilmengen eines metrischen Raumes miteinander zu vergleichen eignet sich die Hausdorffdistanz.

**Definition 2.1.7** (vgl. [BH99, I.5.30]). Sei $(X,d)$ ein metrischer Raum und $A,B \subset X$ zwei Teilmengen. Für $\varepsilon > 0$ seien weiter $V_\varepsilon(A)$ und $V_\varepsilon(B)$ die $\varepsilon$-Umgebungen von $A$ und $B$. Dann ist die Hausdorff-Distanz zwischen $A$ und $B$ durch

$$\mathbf{Hd}(A,B) := \inf\{\varepsilon \in \mathbb{R}_{\ge 0} \mid A \subset V_\varepsilon(B),\ B \subset V_\varepsilon(A)\}$$

definiert.

Ein viel verwendetes Schlüsselresultat bei der Untersuchung hyperbolischer Räume ist, dass sich $(\lambda,\varepsilon)$-Quasigeodäten zwischen zwei Punkten, unabhängig von ihrer Länge, nicht beliebig weit von einer festen Geodäte zwischen diesen Punkten, entfernen können.

**Satz 2.1.8** (vgl. [BH99, III.H.1.7]). *Für alle $\delta > 0$, $\lambda \ge 1$, $\varepsilon \ge 0$ gibt es eine Konstante $K = K(\delta,\lambda,\varepsilon)$ mit der folgenden Eigenschaft: Sei $(X,d)$ ein $\delta$-hyperbolischer Raum und $c$ eine endliche $(\lambda,\varepsilon)$-Quasigeodäte in $X$. Sei $[p,q]$ ein geodetisches Segment, das die beiden Endpunkte von $c$ verbindet. Dann ist die Hausdorffdistanz zwischen $[p,q]$ und dem Bild von $c$ durch $K$ beschränkt.*

Mit Hilfe dieses Resultates kann man nun zeigen, dass bei fixierten Konstanten $\lambda$ und $\varepsilon$, jeder Punkt $p = \gamma(m)$ einer $(\lambda,\varepsilon)$-Quasigeodäten $\gamma$, welche zwei Punkte $x$ und $y$ miteinander verbindet, die Eigenschaft hat, dass die beiden Geodäten $[p,x]$ und $[p,y]$ nach kurzer Zeit auseinander gehen:

**Satz 2.1.9** *Es sei $X$ ein $\delta$-hyperbolischer Raum und $\gamma : [a,b] \to X$ eine $(\lambda,\varepsilon)$-Quasigeodäte. Dann ist für jeden Punkt $p = \gamma(m)$, das Gromov-Produkt $(\gamma(a).\gamma(b))_p$ durch $K(\delta,\lambda,\varepsilon)$ beschränkt.*

*Beweis.* Wegen $p \in im(\gamma)$ folgt aus Satz 2.1.8 für jede Geodäte $[\gamma(a),\gamma(b)]$ die Ungleichung

$$d(p, im([\gamma(a),\gamma(b)])) \le K(\delta,\lambda,\varepsilon) = K.$$

Damit liegt auf jedem geodätischen Segment $[\gamma(a),\gamma(b)]$ ein Element $x \in X$ mit $d(x,p) \le K$. Insbesondere gilt $d(\gamma(a),\gamma(b)) = d(\gamma(a),x) + d(x,\gamma(b))$. Nun folgt mit der Dreiecksungleichung und der Voraussetzung, dass $x$ ein Punkt auf der Geodäten $[\gamma(a), \gamma(b)]$ ist:

$$\begin{aligned}
& (\gamma(a).\gamma(b))_p \\
= \; & \frac{1}{2}(d(p,\gamma(a)) + d(p,\gamma(b)) - d(\gamma(a),\gamma(b))) \\
\leq \; & \frac{1}{2}((d(p,x) + d(x,\gamma(a))) + (d(p,x) + d(x,\gamma(b))) - d(\gamma(a),\gamma(b))) \\
\leq \; & \frac{1}{2}((K + d(x,\gamma(a))) + (K + d(x,\gamma(b))) - d(\gamma(a),\gamma(b))) \\
= \; & \frac{1}{2}(2K + (d(x,\gamma(a)) + d(x,\gamma(b))) - d(\gamma(a),\gamma(b))) \\
= \; & \frac{1}{2}(2K + d(a,b) - d(a,b)) \\
= \; & K.
\end{aligned}$$

□

Das folgende Lemma stellt fest, dass zwei Geodäten mit gleichen Startpunkten, deren Zielpunkte sich nur geringfügig unterscheiden, die meiste Zeit parallel nebeneinander herlaufen:

**Lemma 2.1.10** (vgl. [BH99, III.$H$.1.15]). *Es sei $X$ ein $\delta$-hyperbolischer Raum. Seien weiter $\gamma, \gamma' : [0,T] \to X$ zwei Geodäten mit $\gamma(0) = \gamma'(0)$. Angenommen $d(\gamma(t_0), im(\gamma'))) \leq K$ für ein $K > 0$ und ein $t_0 \in [0,T]$. Dann gilt $d(\gamma(t), \gamma'(t)) \leq 2\delta$ für jedes $t \leq t_0 - K - \delta$.*

Um einige Argumente zu erleichtern, merkt das folgende Lemma an, dass eine Geodäte $[x, y]$ eines hyperbolischen Raums mindestens so lange parallel zu einer Geodäte $[x, z]$ verläuft, bis sie in der $(x.y)_z$-Nähe des Punktes $z$ ist.

**Lemma 2.1.11** *Sei $(X, d)$ ein $\delta$-hyperbolischer Raum und $x, y, z \in X$ beliebige Punkte. Dann gilt für $k \leq d(z, x) - 2(x.y)_z - \delta - 1$ die Abschätzung $d([x, y](k), [x, z](k)) \leq 2\delta$.*

*Beweis.* Aus

$$(x.y)_z = \tfrac{1}{2}(d(x,z) + d(y,z) - d(x,y))$$

erhält man

$$d(x,y) = d(x,z) + d(y,z) - 2(x.y)_z.$$

Dank der Rips-Bedingung gilt

$$d([x,y](k), im([x,z]) \cup im([y,z])) \leq \delta$$

für jedes $k$. Sei $k$ beliebig mit der Eigenschaft $d([x,y](k), im([y,z])) \leq \delta$. Damit gilt offenbar $d(x,y) \leq k + d(y,z) + \delta$ und somit

$$\begin{array}{rrl} & d(x,z) + d(y,z) - 2(x.y)_z = d(x,y) & \leq k + d(y,z) + \delta \\ \Leftrightarrow & d(x,z) - 2(x.y)_z - \delta & \leq k. \end{array}$$

Für $k \leq d(x,z) - 2(x.y)_w - \delta - 1$ hat man also $d([x,y](k), im([y,z])) > \delta$ und damit $d([x,y](k), [x,z](j)) \leq \delta$ für ein passendes $j$. Nun gilt zum einen

$$k = d(x, [x,y](k)) \leq d(x, [x,z](j)) + d([x,z](j), [x,y](k)) \leq j + \delta$$

und zum anderen

$$j = d(x, [x,z](j)) \leq d(x, [x,y](k)) + d([x,y](k), [x,z](j)) \leq k + \delta.$$

Insgesamt liegt also $j$ im Intervall $[k-\delta, k+\delta]$ und es ergibt sich

$$d([x,y](k), [x,z](k)) \leq d([x,y](k), [x,z](j)) + d([x,y](j), [x,z](k)) \leq 2\delta.$$

□

Es sei hier nochmals daran erinnert, dass der Ausdruck $[x,y]^\delta$ die abgeschlossene $\delta$-Umgebung des Bildes einer Geodäte $[x,y]$ in einem metrischen Raum $(X,d)$ bezeichnet.

**Lemma 2.1.12** *Es sei $(X,d)$ ein $\delta$-hyperbolischer Raum und $x,y,z \in X$. Sei $C = (x.y)_z$ und $A, B \geq 0$ beliebig. Dann gilt für jedes $p \in [z,x]^A \cap [z,y]^B$ die Ungleichung $d(p,z) \leq \min\{A + 2B + 2C, 2A + B + 2C\}$.*

*Beweis.* Es sei also $p \in [z,x]^A \cap [z,y]^B$ vorgegeben. Dann existieren $i$ bzw. $j$ mit $d([x,z](i), p) \leq A$ bzw. $d([y,z](j), p) \leq B$. Damit erhält man

$$\begin{array}{rll} d(x,y) & \leq d(x, [x,z](i)) + d([x,z](i), y) & = i + d([x,z](i), y) \\ & \leq i + d([x,z](i), p) + d(p,y) & \leq i + A + d(p,y) \\ & \leq i + A + d(p, [y,z](j)) + d([y,z](j), b) & \leq i + A + B + j. \end{array}$$

Nach Lemma 2.1.11 gelten für $k \geq 2(x.y)_z + \delta + 1$ die Ungleichungen

$$\begin{aligned} d([x,y](d(x,z)-k),[x,z]((d(x,z)-k))) &\leq 2\delta \text{ bzw.} \\ d([y,x](d(y,z)-k),[y,z]((d(y,z)-k))) &\leq 2\delta. \end{aligned}$$

Per Definition ist nun

$$\begin{aligned} & C=(x.y)_z=\tfrac{1}{2}(d(x,z)+d(y,z)-d(x,y)) \\ \Leftrightarrow \quad & 2C+d(x,y)=d(x,z)+d(y,z). \end{aligned}$$

Zusammen ergibt dies

$$\begin{aligned} & d(x,z)+d(y,z) \leq i+j+A+B+2C \text{ bzw.} \\ & i+j \geq d(x,z)+d(y,z)-A-B-2C. \end{aligned}$$

Die Wahl von $i$ bzw. $j$ impliziert $i \leq d(x,z)$ und $j \leq d(y,z)$. Es folgt also

$$\begin{aligned} & d(x,z)+j \geq i+j \geq d(x,z)+d(y,z)-A-B-2C \text{ bzw.} \\ & i+d(y,z) \geq i+j \geq d(x,z)+d(y,z)-A-B-2C. \end{aligned}$$

Man erhält also für $i$ und $j$ die beiden Ungleichungen

$$j \geq d(y,z)-A-B-2C \text{ und } i \geq d(x,z)-A-B-2C.$$

Wegen $[y,z](j) \in [y,z]$ bzw. $[x,z](i) \in [x,z]$ erhält man aus der definierenden Eigenschaft einer Geodäte

$$d(z,[y,z](j)) \leq A+B+2C \text{ und } d(z,[x,z](i)) \leq A+B+2C.$$

Insgesamt ergeben sich nun die Abschätzungen

$$\begin{aligned} d(z,p) &\leq d(z,[x,z](i))+d([x,z](i),p) \leq A+B+2C+A=2A+B+2C, \\ d(z,p) &\leq d(z,[y,z](j))+d([y,z](j),p) \leq A+B+2C+B=A+2B+2C. \end{aligned}$$

Es ergibt sich nun die gewünschte Schranke

$$d(z,p) \leq \min\{A+2B+2C, 2A+B+2C\}.$$

$\square$

Um die fehlende Eindeutigkeit des Ergebnisses abzuschätzen, welche entsteht, wenn man zwei lange Geodäten in einem Cayleygraph zusammenklebt, wird das folgende Lemma eingeführt.

**Lemma 2.1.13** *Es sei $(X, d)$ ein $\delta$-hyperbolischer Raum und $x, y, z, w \in X$ Punkte mit den Eigenschaften $(x.z)_y \leq C_1$ und $(y.w)_z \leq C_2$, sowie $d(y, z) =: N > C_1+C_2+\delta$. Dann läuft jede Geodäte $[x, w]$ in der $(2C_1+5\delta+1)$-Umgebung von $y$ vorbei.*

*Beweis.* Mit Lemma 2.1.12 folgt aus $(x.z)_y \leq C_1$, dass jeder Punkt $p \in [y, x]^A \cap [y, z]^B$ die Ungleichung

$$d(p, y) \leq \min\{A + 2B + 2C, 2A + B + 2C_1\}$$

erfüllt. Zunächst erhält man aus der Rips-Definition $\delta$-hyperbolischer Räume die Inklusion $[x, w] \subset [x, y]^\delta \cup [y, w]^\delta$. Damit erhält man also für die kleinste ganze Zahl $j$ mit $[x, w](j) \notin [x, y]^\delta$ sowohl $[x, w](j) \in [y, w]^\delta$, als auch $[x, w](j-1) \in [x, y]^\delta$ und damit $[x, w](j) \in [x, y]^{\delta+1}$. Nach Voraussetzung gilt

$$\tfrac{1}{2}(d(y, z) + d(w, z) - d(y, w)) = (y.w)_z \leq C_2$$

bzw.

$$d(y, z) + d(w, z) - 2C_2 \leq d(y, w).$$

Damit erhält man insgesamt

$$\begin{aligned}
(z.w)_y &= \frac{1}{2}(d(z, y) + d(w, y) - d(z, w)) \\
&\geq \frac{1}{2}(d(z, y) + d(y, z) + d(w, z) - 2C_2 - d(z, w)) \\
&= \frac{1}{2}(2d(y, z) - 2C_2) \\
&= d(y, z) - C_2 \\
&\geq N - C_2.
\end{aligned}$$

Mit Gromovs Definition $\delta$-hyperbolischer Gruppen erhält man nun

$$(x.z)_y \geq \min\{(x.w)_y, (z.w)_y\} - \delta.$$

Angenommen es wäre $(x.z)_y \geq (z.w)_y - \delta$. Dann folgt aus obiger Argumentation

$$C_1 \geq (x.z)_y \geq (z.w)_y - \delta \geq N - C_2 - \delta.$$

Dies widerspricht jedoch der Voraussetzung $N > C_1 + C_2 + \delta$. Es muss daher $C_1 = (x.z)_y \geq (x.w)_y - \delta$ bzw. $(x.w)_y \leq C_1 + \delta$ gelten. Insgesamt sind nun, für obiges $j$, die Voraussetzungen von Lemma 2.1.12 für $p = [x,w](j)$, $A = \delta + 1$, $B = \delta$ und $C = C_1 + \delta$ erfüllt und man erhält

$$\begin{aligned} d([x,w](j), y) &\leq \min\{A + 2B + 2C, 2A + B + 2C\} \\ &= 3\delta + 1 + 2(C_1 + \delta) \\ &= 2C_1 + 5\delta + 1. \end{aligned}$$

□

Der folgende Satz folgt nun leicht mit Lemma 2.1.13.

**Satz 2.1.14** *Sei $(X, d)$ ein geodätischer $\delta$-hyperbolischer Raum. Seien weiter $p_o, p_t, x_o, x_t, y_o, y_t \in X$ paarweise verschiedene Elemente. Angenommen es gelte $(x_o.y_o)_{p_t} \leq C$ und $d(x_o, x_t) \leq d(p_t, x_t)$, $d(y_o, y_t) \leq d(p_t, y_t)$. Falls $d(p_t, x_o) = d(p_t, y_o) = R$ für ein $R > 2C + 4\delta$ gilt, so verläuft eine der beiden Geodäten $[p_o, x_t]$ oder $[p_o, y_t]$ durch den Ball $B(p_t, 2C + 7\delta + 1)$.*

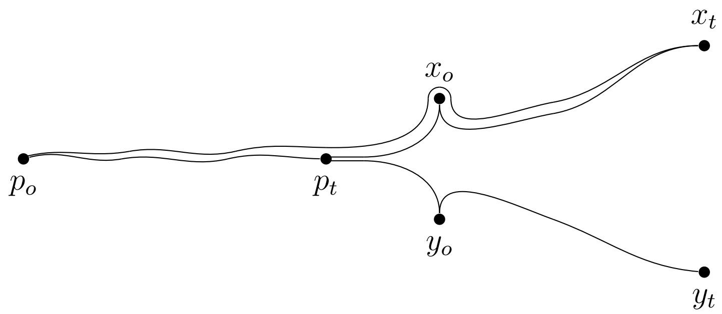


Abbildung 2.1: Die Geodäte $[p_o, x_t]$ läuft nahe an den Punkten $p_t$ und $x_o$ vorbei.

*Beweis.* Mit der Gromov-Bedingung erhält man

$$(x_o.y_o)_{p_t} \geq \min\{(x_o.p_o)_{p_t}, (y_o.p_o)_{p_t}\} - \delta.$$

Ohne Einschränkung kann $C = (x_o.y_o)_{p_t} \geq (x_o.p_o)_{p_t} - \delta$ angenommen werden. Es gelte also $(x_o.p_o)_{p_t} \leq C + \delta$. Aus der Bedingung $d(x_o, x_t) \leq d(p_t, x_t)$ folgt weiter

$$\begin{aligned} (p_t.x_t)_{x_o} &= \frac{1}{2}(d(p_t, x_o) + d(x_t, x_o) - d(p_t, x_t)) \\ &\leq \frac{1}{2}(d(p_t, x_o) + d(p_t, x_t) - d(p_t, x_t)) \\ &= \frac{1}{2}(d(p_t, x_o)) = \frac{R}{2}. \end{aligned}$$

Aus den Bedingungen

$$(p_t.x_t)_{x_o} \leq \tfrac{R}{2},\ (x_o.p_o)_{p_t} \leq C + \delta \text{ und } d(p_t, x_o) = R$$

folgt nun, dass Lemma 2.1.13 auf die Punkte $p_o, p_t, x_o$ und $x_t$ angewandt werden kann, falls $R > C + \delta\ +\ \frac{R}{2}\ +\ \delta$ ist. Dies ergibt sich jedoch sofort aus der Voraussetzung $R > 2C+4\delta$. Setzt man $\varepsilon = 2(C+\delta)+5\delta+1 = 2C+7\delta+1$, so läuft nach Lemma 2.1.13 jede Geodäte $[p_o, x_t]$ in der $\varepsilon$-Umgebung von $p_t$ vorbei.

□

## 2.2 Hyperbolische Gruppen

In diesem Abschnitt wird an einige algebraische Eigenschaften hyperbolischer Gruppen erinnert, die im Folgenden gebraucht werden.

**Definition 2.2.1** Es sei $G$ eine endlich erzeugte Gruppe mit Erzeugendensystem $X$. Dann heißt $G$ $\delta$-hyperbolisch, falls ihr Cayleygraph $\Gamma(G, X)$ ein $\delta$-hyperbolischer Raum ist.

**Satz 2.2.2** (vgl. [BH99, III.Γ.3.10]). *Sei $G$ eine $\delta$-hyperbolische Gruppe und $g \in G$ ein Element unendlicher Ordnung. Dann gelten die beiden folgenden Eigenschaften.*

1) *Die Abbildung $\mathbb{Z} \to G$, $z \mapsto g^z$ ist eine $(\lambda, \varepsilon)$-Quasigeodäte.*

2) *Der Index der Gruppe $\langle g \rangle$ in ihrem Zentralisator ist endlich.*

**Theorem 2.2.3** (vgl. [BH99, III.Γ.3.20]). *Sei $G$ eine $\delta$-hyperbolische Gruppe und $g_1, \ldots, g_n \in G$ beliebige Elemente. Dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, sodass die Gruppe $\langle g_1^N, \ldots, g_n^N \rangle$ frei vom Rang $\leq n$ ist.*

Nun noch ein bekanntes Lemma zu freien Gruppen welches einige Argumente vereinfachen wird.

**Lemma 2.2.4** (vgl. [LS15, Proposition 2.7]). *Es sei $G$ eine freie Gruppe vom Rang $n$ und $g_1, \ldots, g_n$ ein Erzeugendensystem von $G$. Dann ist $g_1, \ldots, g_n$ auch ein freies Erzeugendensystem von $G$.*

**Korollar 2.2.5** *Sei $G$ eine $\delta$-hyperbolische Gruppe. Seien weiter $g, h \in G$ beliebige Elemente unendlicher Ordnung. Dann ist genau eine der beiden folgenden Aussagen erfüllt.*

1) *Es gibt zwei Zahlen* $m, n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ *mit* $g^m = h^n$.

2) *Es gibt ein* $N \in \mathbb{N}$, *sodass die beiden Elemente* $g^N$ *und* $h^N$ *ein freies Erzeugendensystem der Gruppe* $\langle g^N, h^N \rangle$ *bilden.*

*Beweis.* Da $g$ und $h$ unendliche Ordnung haben, gibt es nach Theorem 2.2.3 ein $N \in \mathbb{N}$, sodass $\langle g^N, h^N \rangle$ eine freie Gruppe vom Rang 1 oder 2 ist. Falls der Rang 2 ist, so bilden die beiden Elemente $g^N$ und $h^N$ nach Lemma 2.2.4 ein freies Erzeugendensystem von $\langle g^N, h^N \rangle$. Falls der Rang 1 ist, so haben wir die Aussage 1).

$\square$

**Lemma 2.2.6** *Es sei* $G$ *eine hyperbolische Gruppe und* $g \in G$ *ein Element unendlicher Ordnung. Dann gibt es kein* $m \in \mathbb{Z}\backslash\{-1, 1\}$, *für welches ein Element* $h \in G$ *mit* $hgh^{-1} = g^m$ *existiert.*

*Beweis.* Angenommen es gäbe solche $z$ und $h$. Dann wäre $h^m g h^{-m} = g^{z^m}$ für jedes $m \in \mathbb{N}$. Insbesondere wäre die Abbildung $\mathbb{N} \to G,\ n \mapsto g^n$ keine Quasiisometrie, im Widerspruch zur ersten Aussage von Satz 2.2.2.

$\square$

## 2.3 Die Operation auf dem Gromov-Rand

Für den weiteren Verlauf der Arbeit ist es äußerst wichtig die mögliche Struktur der Untergruppen einer hyperbolischen Gruppe $G$ zu verstehen. Dabei hilft das allgemeine Studium von Gruppenwirkungen auf hyperbolischen Räumen und die dadurch induzierte Operation auf dem Gromov-Rand des hyperbolischen Raumes, welche in diesem Abschnitt behandelt wird. Ich folge hierzu den Kapiteln 7 und 8 in [GdLH90]. Zwei Beispiele, die man sich vor Augen führen kann, um die Operation auf dem Gromov-Rand leichter zu verstehen, sind zum einen die Wirkung einer fuchschen Gruppe auf der hyperbolischen Ebene und zum anderen die Wirkung einer hyperbolischen Gruppe auf ihrem Cayleygraphen. Zunächst werden zwei Varianten der Definition des Gromov-Randes eines hyperbolischen Raumes gegeben.

**Definition 2.3.1** Sei $(X, d)$ ein hyperbolischer Raum. Es bezeichne $Geod(X)$ die Menge aller, einseitig unendlichen, Geodäten in $X$. Der Gromov-Rand von $X$ besteht nun aus Äquivalenzklassen von Geodäten $\gamma_1, \gamma_2 \in Geod(X)$, wobei $\gamma_1$ und $\gamma_2$ äquivalent sind, falls die Hausdorffdistanz zwischen $\gamma_1$ und

$\gamma_2$ endlich ist. Der Gromov-Rand eines hyperbolischen Raums $X$ wird im Folgenden mit $\partial X$ bezeichnet.

**Definition 2.3.2** Falls für je zwei natürliche Zahlen $m, n \in \mathbb{N}$ eine nicht-negative Zahl $c_{m,n} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ vorgegeben ist, sodass für zwei beliebige monoton aufsteigende, unbeschränkte Folgen natürlicher Zahlen $(m_i)_{i\in\mathbb{N}}$ und $(n_i)_{i\in\mathbb{N}}$ die Eigenschaft $\liminf\limits_{i\to\infty} c_{m_i,n_i} = \infty$ erfüllt ist, so wird im Folgenden

$$\lim_{m,n\to\infty} c_{m,n} = \infty$$

geschrieben.

Die folgende Definition bietet eine äquivalente Beschreibung des Gromov-Randes und wird in diesem Abschnitt wegen der einfacheren Handhabung verwendet werden.

**Definition 2.3.3** Sei $(X, d)$ ein hyperbolischer Raum und $x \in X$ ein beliebiger Punkt. Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert im Unendlichen, falls $\lim\limits_{m,n\to\infty} (x_m.x_n)_x = \infty$ gilt. Der Gromov-Rand von $X$ besteht nun aus Äquivalenzklassen von Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $X$, welche im Unendlichen konvergieren. Dabei sind zwei Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ äquivalent, falls $\lim\limits_{m,n\to\infty} (x_m.y_n)_x = \infty$ gilt. Ist $M \subset X$ eine Teilmenge, welche eine im Unendlichen konvergente Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ enthält, so spricht man bei der Klasse $a$ von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von einem Limespunkt von $M$. Die Menge der Limespunkte von $M$ wird als die Limesmenge von $M$ bezeichnet.

Man sieht leicht, dass sich die Isometrien eines hyperbolischen Raumes zu Abbildungen auf dem Gromov-Rand fortsetzen lassen.

**Definition und Lemma 2.3.4** *Es sei $G$ eine Gruppe, welche durch Isometrien auf einem hyperbolischen Raum $(X, d)$ wirkt. Dann operiert $G$ durch*

$$G \times \partial X \to \partial X,\ (g, (x_n)_{n\in\mathbb{N}}) \mapsto (g(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$$

*auf dem Gromov-Rand von $X$.*

Die Isometrien eines hyperbolischen Raumes $(X, d)$ können nun mit Hilfe von Limespunkten klassifiziert werden.

**Definition und Lemma 2.3.5** (vgl. [GdLH90, Korollar 8.20]). *Es sei $G$ eine Gruppe die durch Isometrien auf einem hyperbolischen Raum $(X, d)$ wirkt. Seien weiter $x \in X$ und $g \in G$ beliebig. Dann enthält die Limesmenge $L$ der Bahn $\langle g\rangle \cdot x$ höchstens 2 Punkte und man nennt $g$*

1) *elliptisch, falls L keinen Limespunkt enthält.*

2) *parabolisch, falls L einen Limespunkt enthält.*

3) *hyperbolisch, falls L zwei Limespunkte enthält.*

**Definition 2.3.6** Eine Gruppe $G$ heißt elementar, falls sie eine unendliche zyklische Untergruppe vom endlichen Index enthält.

Wendet man diese Terminologie auf die kanonische Gruppenoperation einer hyperbolischen Gruppe $G$ auf sich selbst an, so stellt das folgende Theorem fest, dass die Struktur der Stabilisatoren $G_a$, für $a \in \partial G$, starken Einschränkungen unterworfen ist.

**Theorem 2.3.7** (vgl. [GdLH90, Theorem 8.30]). *Es sei $G$ eine unendliche hyperbolische Gruppe und $a \in \partial G$ ein beliebiger Limespunkt. Dann tritt genau einer der beiden folgenden Fälle auf.*

1) *$G_a$ ist endlich.*

2) *Es gibt (genau) einen Punkt $b \in \partial G \backslash \{a\}$, welcher von allen Elementen $g \in G_a$ fixiert wird. In diesem Fall ist $G_a$ elementar und man erhält $G_a = G_b$.*

Das folgende Lemma gibt einem die Möglichkeit, Limespunkte in unbeschränkten Teilmengen hyperbolischer Gruppen zu finden.

**Lemma 2.3.8** *Es sei $G$ eine hyperbolische Gruppe mit endlichem Erzeugendensystem $X$. Dann enthält die Limesmenge jeder unendlichen Teilmenge $T \subset G \subset \Gamma(G, X)$ mindestens ein Element.*

*Beweis.* Es sei $T = \{t_1, t_2, t_3, \ldots\}$ eine Abzählung von $T$. Wähle zu jedem $j \in \mathbb{N}$ eine Geodäte $[1, t_j]$. Es sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Da der Ball $B_G^X(n) \subset G$ nur endlich viele Elemente enthält, gibt es ein Element $g_n \in G$ mit $|g_n|_X = n$, welches auf unendlich vielen Geodäten $[1, t_j]$ liegt. Durch Einschränkung auf eine Teilfolge kann also angenommen werden, dass alle Geodäten $[1, t_j]$ durch den Punkt $g_n$ laufen. Ebenso erhält man ein Element $g_{n+1} \in G$ mit $|g_{n+1}|_X = n + 1$, welches auf unendlich vielen Geodäten $[1, t_j]$ liegt. Induktiv erhält man also eine Geodäte $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und eine Folge $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $g_n \in [1, t_n]$. Seien nun $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zwei aufsteigende, divergente Folgen natürlicher Zahlen und $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die Folge ihres punktweisen Minimums $c_n = \min\{a_n, b_n\}$.

Dann gilt nach Konstruktion $g_{c_n} \in [1, t_{a_n}] \cap [1, t_{b_n}]$ und man erhält

$$\begin{aligned} d(t_{a_n}, t_{b_n})_X &\leq d(t_{a_n}, g_{c_n})_X + d(g_{c_n}, t_{b_n})_X \\ &= |t_{a_n}|_X - c_n + |t_{b_n}|_X - c_n \\ &= |t_{a_n}|_X + |t_{b_n}|_X - 2c_n. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} (t_{a_n}.t_{b_n})_1 &= \frac{1}{2}(|t_{a_n}|_X + |t_{b_n}|_X - d(t_{a_n}, t_{b_n})_X) \\ &\geq \frac{1}{2}(|t_{a_n}|_X + |t_{b_n}|_X - (|t_{a_n}|_X + |t_{b_n}|_X - 2c_n)) \\ &= c_n. \end{aligned}$$

Nach Konstruktion gilt $c_n \to \infty$ für $n \to \infty$. Per Definition bildet also die Folge $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ einen Limespunkt der Menge $T$.

□

Das folgende Lemma wird dabei helfen hyperbolische Elemente zu erzeugen, falls einem nur elliptische Elemente zur Verfügung stehen. Der Beweis ist eher technisch und ergibt sich im Wesentlichen aus einer mehrfachen Anwendung von Theorem 2.1.5.

**Lemma 2.3.9** (vgl. [GdLH90, Lemma 8.35]). *Es seien $\gamma_1$ und $\gamma_2$ zwei Isometrien endlicher Ordnung, welche auf einem $\delta$-hyperbolischen Raum $X$ operieren. Angenommen es gibt einen Punkt $x \in X$, sodass die Ungleichung*

$$d_X(x, \gamma_j(x)) > 2(\gamma_1.\gamma_2)_x + 24\delta$$

*für $j \in \{1, 2\}$ erfüllt ist. Dann folgt, dass die Isometrie $\gamma_1^{-1}\gamma_2$ hyperbolisch ist.*

**Korollar 2.3.10** (vgl. [GdLH90, Korollar 8.36]). *Es sei $G$ eine hyperbolische Gruppe. Sei weiter $H \leq G$ eine Untergruppe, welche nur Elemente endlicher Ordnung besitzt. Dann ist $H$ endlich.*

*Beweis.* Wähle zunächst ein endliches Erzeugendensystem $X$ von $G$. Angenommen $H \leq G$ ist eine unendliche Untergruppe und $L \subset \partial\Gamma$ die Menge der Limespunke von $H$. Nach Lemma 2.3.8 ist $L$ nicht leer. Enthält $L$ nur einen Punkt $a$, so wird $a$ notwendigerweise von $H$ fixiert. Man erhält also $H \leq \Gamma_a$. Nach Theorem 2.3.7 enthält $\Gamma_a$ eine unendliche zyklische Untergruppe $L$

vom endlichen Index. Da $H$ unendlich ist, ist auch der Schnitt $H \cap L$ eine unendliche zyklische Untergruppe. Dies ist ein Widerspruch. Damit enthält $H$ auch hyperbolische Elemente. Falls $L$ jedoch mindestens zwei Punkte $a, b \in L$ enthält, so gibt es auch Folgen $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bzw. $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $H$, welche gegen $a$ bzw. $b$ konvergieren. Per Definition gibt es also Teilfolgen $(\alpha_{m_i})_{i\in\mathbb{N}}$ und $(\beta_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ und ein $C \geq 0$, sodass zum einen die Bedingungen

$$\lim_{i\to\infty} |\alpha_{m_i}|_X = \infty \text{ und } \lim_{i\to\infty} |\beta_{n_i}|_X = \infty$$

erfüllt sind und zum anderen $(\alpha_{m_i}.\beta_{n_i})_1 \leq C$ für jedes $i \in \mathbb{N}$ gilt. Aus Lemma 2.3.9 folgt nun, dass eines der Elemente $\alpha_{m_i}$, $\beta_{n_i}$ oder $\alpha_{m_i}\beta_{n_i}^{-1}$ für ein passendes $i$ hyperbolisch ist.

□

Nun können die Untergruppen einer hyperbolischen Gruppe in drei Kategorien eingeteilt werden.

**Theorem 2.3.11** (vgl. [GdLH90, Theorem 8.37]). *Sei $G$ eine $\delta$-hyperbolische Gruppe und $H \leq G$ eine beliebige Untergruppe. Dann stimmt genau eine der folgenden Aussagen.*

1) *$H$ ist endlich.*

2) *$H$ ist elementar.*

3) *$H$ enthält eine nicht-abelsche freie Untergruppe.*

*Beweis.* Angenommen $H$ ist unendlich, dann folgt aus Korollar 2.3.10, dass $H$ mindestens ein hyperbolisches Element $g$ enthält. Seien $a$ und $b$ die Fixpunkte von $g$ in $\partial\Gamma$. Nach Theorem 2.3.7 ist $\Gamma_a$ elementar und es gilt $\Gamma_a = \Gamma_b$. Wäre $H \leq \Gamma_a$, so wäre also 2) erfüllt, da Untergruppen elementarer Gruppen wieder elementar sind. Deswegen können wir annehmen, dass $H$ nicht in $\Gamma_a$ liegt. Dann existiert ein Element $h \in H$ unter welchem die Menge $\{a, b\}$ nicht invariant ist. Es wird ein Element $k$ mit der Eigenschaft $\{a, b\} \cap \{k(a), k(b)\} = \emptyset$ gebraucht. Dieses soll nun konstruiert werden. Zunächst kann ohne Einschränkung $c_0 := h(a) \notin \{a, b\}$ angenommen werden. Da $g$ nur die beiden Fixpunkte $a$ und $b$ in $\partial\Gamma$ besitzt, folgt für jedes $n \in \mathbb{N}$, dass $c_n := g^n(c_0)$ nicht in der Menge $\bigcup_{m\in\mathbb{Z}\setminus\{n\}} \{c_m\} \cup \{a, b\}$ enthalten ist.

Damit die Operation von $h$ auf $\partial\Gamma$ wohldefiniert ist, muss es ein $M \in \mathbb{N}$ mit $h(c_M) \notin \{a, b\}$ geben. Wäre $h(b) \notin \{a, b\}$, so wäre alles gezeigt. Falls nun

$h(b) = b$ ist, so folgt aus $\Gamma_a = \Gamma_b$ auch $h(a) = a$. Dies ist jedoch ein Widerspruch zu $c_0 \neq a$. Es kann also $h(b) = a$ angenommen werden. Sei $k = hg^M h$. Dann folgt nach Konstruktion $k(a) = hg^M(c_0) = h(c_M) \notin \{a, b\}$ und $k(b) = hg^M(a) = h(a) = c_0 \notin \{a, b\}$. Das hyperbolische Element $\widehat{g} = kgk^{-1}$ hat daher die Fixpunkte $k(a)$ und $k(b)$ in $\partial\Gamma$ mit $\{a, b\} \cap \{k(a), k(b)\} = \emptyset$. Insbesondere gilt auch für alle $p, q \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, dass die Fixpunkte der Gruppen $\langle g^p \rangle$ und $\langle \widehat{g}^q \rangle$ disjunkt sind. Dadurch ist eine Gleichung der Form $g^p = \widehat{g}^q$ nicht möglich, sodass nach Korollar 2.2.5 ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, sodass die Elemente $g^N$ und $\widehat{g}^N$ eine freie Basis der Gruppe $\langle g^N, \widehat{g}^N \rangle$ bilden.

□

**Beispiel 2.3.12** Um zu sehen, dass elliptische Elemente der Isometriegruppe eines hyperbolischen Raumes im Allgemeinen keine endliche Ordnung haben müssen, betrachte man die freie Gruppe $G := F(a, b)$ und das Erzeugendensystem $X = \{a^n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Dann ist der Cayleygraph $\Gamma(G, X)$ offenbar hyperbolisch, aber die Erzeuger $a$ und $b$ sind trotz ihrer unendlichen Ordnung elliptisch, da die Untergruppen $\langle a \rangle$ und $\langle b \rangle$ beschränkt in $\Gamma(G, X)$ sind.

# Kapitel 3

# Lineare Supermultiplikativität

Das Ziel dieses Abschnittes ist es, bei einer gegebenen hyperbolischen Gruppe $G$ mit endlichem Erzeugendensystem $X$ und einer nicht-elementaren Untergruppe $H$, mittels einer endlichen Teilmenge $M \subset H$ eine lineare Schranke für die Mehrdeutigkeit von $G$ bezüglich $X$ zu finden.

## 3.1 Geometrische Vorbereitung

**Lemma 3.1.1** *Es sei $G$ eine hyperbolische Gruppe mit endlichem Erzeugendensystem $X$ und $g, h \in G$ zwei hyperbolische Elemente mit $\langle g, h\rangle \cong F(a, b)$. Dann gibt es ein $C \geq 0$, sodass jedes $n \in \mathbb{Z}$ die Abschätzung $(g^n.h^n)_1 \leq C$ erfüllt.*

*Beweis.* Zunächst gibt es zu jeder Konstanten $C \geq 0$ ein $M \in \mathbb{N}$, sodass für alle $m, n \geq M$ die Ungleichung $d_X(g^m, h^n) \geq C$ gilt. Angenommen das wäre nicht der Fall, dann gäbe es also eine Konstante $C \geq 0$, sodass unendlich viele $m, n \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft $d_X(g^m, h^n) \leq C$ existieren. Dann gäbe es auch Folgen paarweise verschiedener Zahlen $(i_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(j_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $d_X(g^{i_n}, h^{j_n}) \leq C$. Nach der Definition der Wortmetrik gibt es also zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein Element $\varepsilon_n \in G$ mit $|\varepsilon_n|_X \leq C$ und $h^{j_n} = g^{i_n}\varepsilon_n$. Da es unendlich viele Möglichkeiten für $n$ gibt, jedoch nur endlich viele Elemente $\varepsilon_n \in G$ mit $|\varepsilon_n|_X \leq C$ existieren, gibt es ein $\varepsilon \in G$, welches die Gleichungen $h^p = g^q\varepsilon$ und $h^{p'} = g^{q'}$ für $p \neq p'$ erfüllt. Damit wäre jedoch

$$1 \neq h^p h^{-p'} = g^q\varepsilon(g^{q'}\varepsilon)^{-1} = g^p g^{-p'}.$$

Dies ist jedoch ein Widerspruch zu $\langle g, h\rangle \cong F(a, b)$, da nach Lemma 2.2.4 die Elemente $g$ und $h$ eine freie Basis bilden. Nach Satz 2.2.2 sind die Abbildungen $n \mapsto g^n$ und $n \mapsto h^n$ quasiisometrische Einbettungen von $\mathbb{Z}$ nach $G$. Also gibt es nach Satz 2.1.8 ein $A \geq 0$, sodass für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichungen

$$\mathbf{Hd}(\{g^z \mid z \in \mathbb{Z}\}, [1, g^n]) \leq A \text{ und } \mathbf{Hd}(\{h^z \mid z \in \mathbb{Z}\}, [1, h^n]) \leq A$$

erfüllt sind. Nun verläuft jede Geodäte $[g^m, h^n]$ in der $\delta$-Umgebung der beiden Geodäten $[1, g^m]$ und $[1, h^n]$. Insbesondere verläuft $[g^m, h^n]$ in der $(\delta + A)$-Umgebung der Menge $\{g^n \mid n \in \mathbb{Z}\} \cup \{h^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Damit gibt es ein $j \in \mathbb{N}_0$, sodass der Punkt $p := [g^m, h^n](j)$ für zwei passende ganze Zahlen $m_0, n_0$ die Bedingungen $d_X(p, g^{m_0}) \leq \delta + A + 1$ und $d_X(p, h^{n_0}) \leq \delta + A$ erfüllt. Dann ist jedoch $d_X(g^{m_0}, h^{n_0}) \leq 2A + 2\delta + 1$. Nach der anfänglichen Bemerkung gibt es ein $M$, sodass für alle $l, k \geq M$ die Ungleichung $d_X(g^l, h^k) > 2A + 2\delta + 1$ gilt. Damit gilt entweder $m_0 \leq M$ oder $n_0 \leq M$. Setzt man

$$L = \max\{|x^i|_X : x \in \{g, h\}, -M \leq i \leq M\},$$

so lässt sich die Länge von $p$ durch

$$\begin{aligned} d_X(1, p) &\leq \min\{d_X(1, g^m) + d_X(g^m, p), d_X(1, h^n) + d_X(h^n, p)\} \\ &\leq L + \delta + A + 1 =: K \end{aligned}$$

beschränken und der Abstand zwischen den Elementen $g^m$ und $h^n$ ist mindestens

$$\begin{aligned} d_X(g^m, h^n) &= d_X(g^m, p) + d_X(p, h^n) \\ &\geq (d_X(g^m, 1) - d_X(1, p)) + (d_X(h^n, 1) - d_X(1, p)) \\ &\geq (d_X(g^m, 1) - K)) + (d_X(1, h^n)) - K) \\ &= |g_m|_X + |h_n|_X - 2K. \end{aligned}$$

Damit folgt für das Gromov-Produkt

$$\begin{aligned} (g^m.h^n)_1 &= \tfrac{1}{2}(d_X(g^m, 1) + d_X(1, h^n) - d_X(g^m, h^n)) \\ &\leq \tfrac{1}{2}(d_X(g^m, 1) + d_X(1, h^n) - (|g_m|_X + |h_n|_X - 2K)) \\ &= K. \end{aligned}$$

$\square$

Wenn zwei Elemente $g, h \in G$ eine freie Basis einer Untergruppe bilden, so auch $g^{\pm 1}$ und $h^{\pm 1}$. Das Lemma 3.1.1 kann also auf alle Paare $(g^{\pm 1}, h^{\pm 1})$ angewandt werden und man erhält durch die Wahl der dabei größten entstandenen Konstante das folgende Korollar.

**Korollar 3.1.2** *Es sei $G$ eine hyperbolische Gruppe und $g, h \in G$ zwei hyperbolische Elemente mit $\langle g, h\rangle \cong F(a, b)$. Dann gibt es ein $C \geq 0$, sodass für jedes $n \in \mathbb{Z}$ und für je zwei Elementen $x, y \in \{g^n, g^{-n}, h^n, h^{-n}\}$ mit $x \neq y^{\pm 1}$ die Ungleichung $(x.y)_1 \leq C$ erfüllt ist.*

Es folgen nun zwei Hilfsresultate, welche das potentiell schlechte Verhalten beim Zusammensetzen von Geodäten beschränken.

**Lemma 3.1.3** *Es sei $G$ eine hyperbolische Gruppe und $g, h \in G$ zwei hyperbolische Elemente mit $\langle g, h\rangle \cong F(a, b)$. Dann gibt es ein $A \geq 0$, sodass für jedes $n \in \mathbb{N}$ und jedes $u \in G$ mindestens eine der folgenden Aussagen erfüllt ist.*

1) *Es gilt $(g^n.u)_1 \leq A$ und $(g^{-n}.u)_1 \leq A$.*

2) *Es gilt $(h^n.u)_1 \leq A$ und $(h^{-n}.u)_1 \leq A$.*

*Beweis.* Nach Korollar 3.1.2 gibt es ein $C \geq 0$, sodass das Gromovprodukt $(x.y)_1$ zweier Elemente $x, y \in \{g^n, g^{-n}, h^n, h^{-n}\}$ mit $x \neq y^{\pm 1}$ durch $C$ beschränkt ist. Setze $A = C + \delta$. Die Gromov-Bedingung liefert die folgenden Ungleichungen

$$C \geq (g^n.h^n)_1 \geq \min\{(g^n.u)_1, (u.h^n)_1\} - \delta,$$

$$C \geq (g^{-n}.h^n)_1 \geq \min\{(g^{-n}.u)_1, (u.h^n)_1\} - \delta,$$

$$C \geq (g^n.h^{-n})_1 \geq \min\{(g^n.u)_1, (u.h^{-n})_1\} - \delta,$$

$$C \geq (g^{-n}.h^{-n})_1 \geq \min\{(g^{-n}.u)_1, (u.h^{-n})_1\} - \delta.$$

Im Falle von $(g^n.u)_1 > C + \delta$ oder $(g^{-n}.u)_1 > C + \delta$ folgt daher sofort

$$C + \delta \geq (u.h^n)_1 \text{ und } C + \delta \geq (u.h^{-n})_1.$$

Ebenso ergeben sich im Falle von $(h^n.u)_1 > C + \delta$ oder $(h^{-n}.u)_1 > C + \delta$ die Ungleichungen

$$C + \delta \geq (u.g^n)_1 \text{ und } C + \delta \geq (u.k^{-n})_1.$$

□

**Lemma 3.1.4** *Es sei $G$ eine hyperbolische Gruppe und $h \in G$ ein hyperbolisches Element. Dann gibt es ein $A \geq 0$, sodass für jedes $n \in \mathbb{N}$ und jedes $g \in G$ mindestens eine der Ungleichungen $(h^n.g)_1 \leq A$ und $(h^{-n}.g)_1 \leq A$ erfüllt ist.*

*Beweis.* Nach Satz 2.2.2 ist die Abbildung $n \mapsto h^n$ eine quasiisometrische Einbettung von $\mathbb{N}$ nach $G$. Dann existiert (nach Lemma 2.1.9) ein Konstante $C$, sodass für jedes $n \in \mathbb{Z}$ die Ungleichung $(h^{-n}.h^n)_1 \leq C$ erfüllt ist. Setzt man $A = C + \delta$, so folgt die Aussage sofort aus der Gromov-Bedingung

$$C \geq (h^{-n}.h^n)_1 \geq \min(h^{-n}.g)_1, (g.h^n)_1 - \delta.$$

□

Folgendes Lemma folgt aus der Linksinvarianz der Metrik $d_X$.

**Lemma 3.1.5** *Sei $G$ eine hyperbolische Gruppe mit endlichen Erzeugendensystem $X$ und seien $g, h, k, l \in G$ beliebige Elemente. Dann gilt die Gleichung*

$$(h.k)_l = (gh.gk)_{gl}.$$

## 3.2 Existenz des Grenzwertes

**Lemma 3.2.1** *Es sei $G$ eine hyperbolische Gruppe und $H$ eine Untergruppe von $G$. Seien $g, h \in H$ zwei hyperbolische Elemente mit $\langle g, h\rangle \cong F(a, b)$. Dann gibt es ein $A \geq 0$, sodass für jedes $n \in \mathbb{Z}$ und jedes Paar $(u, v) \in G \times G$ ein Element $x_{u,v} \in \{g^n, g^{-n}, h^n, h^{-n}\}$ mit den Eigenschaften*

$$(u^{-1}.x_{u,v})_1 \leq A \text{ und } (v.x_{u,v}^{-1})_1 \leq A$$

*existiert.*

*Beweis.* Es seien zwei Elemente $u$ und $v$ vorgegeben. Dann gibt es nach Lemma 3.1.3 und Lemma 3.1.4 jeweils Schranken $A_1$ und $A_2$, sodass, unabhängig von $n$, ein Element $x_{u,v} \in \{g^n, g^{-n}, h^n, h^{-n}\}$ existiert, sodass die beiden Ungleichungen $(u^{-1}.x_{u,v})_1 \leq A_1$ und $(u^{-1}.x_{u,v}^{-1})_1 \leq A_1$ erfüllt sind und mindestens eine der beiden Ungleichungen $(v.x_{u,v})_1 \leq A_2$ oder $(v.x_{u,v}^{-1})_1 \leq A_2$ gilt. Durch eventuelles vertauschen von $x_{u,v}$ durch $x_{u,v}^{-1}$ und setzen von $A = \max\{A_1, A_2\}$ folgt die Aussage.

$\square$

**Definition 3.2.2** In der Situation von Lemma 3.2.1 soll nun

$$C_n := \max\{|g^n|_X, |g^{-n}|_X, |h^n|_X, |h^{-n}|_X\}$$

gesetzt werden. Damit erhält man die Abbildungen

$$\phi_n : G \times G \to G,\ (u,v) \mapsto ux_{u,v}v.$$

Schränkt man diese Abbildungen auf Produkte der Form $B_H^X(s) \times B_H^X(t)$ ein, so erhält man Abbildungen der Form

$$B_H^X(s) \times B_H^X(t) \to B_H^X(s+t+C_n),\ (u,v) \mapsto ux_{u,v}v.$$

Um die Bezeichnungen nicht unnötig zu verkomplizieren, werden die Einschränkungen auch mit $\phi_n$ bezeichnet.

**Theorem 3.2.3** *Es sei $G$ eine hyperbolische Gruppe und $g, h \in G$ zwei hyperbolische Elemente mit $\langle g, h\rangle \cong F(a,b)$. Dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ und ein $\varepsilon \geq 0$, sodass für jedes $n \geq N$ jede Geodäte $[1, \phi_n(u,v)]$ die $\varepsilon$-Umgebungen von $u$ und $ux_{u,v}$ durchläuft.*

*Beweis.* Es soll Lemma 2.1.13 auf die vier Punkte $1, u, ux_{u,v}$ und $ux_{u,v}v$ angewandt werden. Sei $A$ die Konstante aus Definition 3.2.2. Dann gilt nach Lemma 3.1.5, dass $(1.ux_{u,v})_u = (u^{-1}.x_{u,v})_1 \leq A$ ist und

$$(ux_{u,v}.ux_{u,v}v)_{ux_{u,v}} = ((ux_{u,v})^{-1}u.(ux_{u,v})^{-1}ux_{u,v}v)_{(ux_{u,v})^{-1}ux_{u,v}} = ((x_{u,v})^{-1}.v)_1 \leq A$$

ist. Da $g$ und $h$ unendliche Ordnung haben, kann $N$ so groß gesetzt werden, dass für jedes $n \in \mathbb{Z}$ mit $|n| \geq N$ die Bedingung

$$\min\{|g^n|_X, |g^{-n}|_X, |h^n|_X, |h^{-n}|_X\} > 2A + \delta$$

erfüllt ist. Dann gilt auch $d_X(g, gx_{g,h}) = |x_{g,h}|_X > 2A + \delta$. Setzt man nun $\varepsilon = 2A + 5\delta + 1$, so folgt aus Lemma 2.1.13, dass jede Geodäte $[1, gx_{g,h}h]$ durch die $\varepsilon$-Umgebung von $g$ läuft. Durch symmetrische Argumentation erhält man, dass jede Geodäte $[gx_{g,h}h, 1]$ durch die $\varepsilon$-Umgebungen von $gx_{g,h}$ läuft.

$\square$

**Theorem 3.2.4** *Es sei $G$ eine hyperbolische Gruppe und $g, h \in G$ zwei hyperbolische Elemente mit $\langle g, h\rangle \cong F(a,b)$. Dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ und eine lineare Abbildung $l : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sodass alle endlichen Teilmengen $S, T \subset G$, mit $S \subset B^X(s)$ und $T \subset B^X(t)$ die folgende Bedingung erfüllen. Die Kardinalität der Urbilder von Elementen aus $B_H^X(s+t+C_n)$ bezüglich der Abbildung $\phi_{n|S\times T} : S \times T \to B_H^X(s+t+C_n)$, ist für jede natürliche Zahl $n \geq N$ durch $l(t)$ beschränkt.*

*Beweis.* Der Übersicht halber soll hier nicht zwischen den Ausdrücken $\phi_{n|S\times T}$ und $\phi_n$ unterschieden werden. Nach Theorem 3.2.3 gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ und ein $\varepsilon > 0$, sodass für jedes $n \geq N$ und jedes Paar von Elementen $(u, v) \in S \times T$, jede Geodäte $[1, \phi_n(u, v)]$ durch die $\varepsilon$-Bälle der Elemente $u$ und $ux_{u,v}$ läuft. Falls nun $\phi_n(u, v) = \phi_n(\widehat{u}, \widehat{v})$ gilt, so läuft $[1, \phi_n(u, v)]$ also auch durch den $\varepsilon$-Ball um den Punkt $\widehat{u}$. Zu jedem $\widehat{u} \in S$, für welches ein $\widehat{v} \in T$ mit $\phi_n(u, v) = \phi_n(\widehat{u}, \widehat{v})$ existiert, gibt es also ein $z \in [1, \phi_n(u, v)]$ mit $d_X(\widehat{u}, z) \leq \varepsilon$. Weiter gilt

$$\begin{aligned}
d_X(\widehat{u}, \phi_n(u, v)) &= d_X(\widehat{u}, \phi_n(\widehat{u}, \widehat{v})) = d_X(\widehat{u}, \widehat{u}x_{u,v}\widehat{v}) \\
&= d_X(1, x_{u,v}\widehat{v}) \leq d_X(1, \widehat{v}) + d_X(1, x_{u,v}) \\
&\leq t + C_n.
\end{aligned}$$

Damit erhält man auch

$$d_X(z, \phi_n(u, v)) \leq d_X(z, \widehat{u}) + d_X(\widehat{u}, \phi_n(u, v)) \leq \varepsilon + t + C_n.$$

Es gibt also höchstens $\varepsilon + t + C_n$ Punkte $z \in G$ auf der Geodäten $[1, \phi_n(u, v)]$, für welche die Abschätzung $d_X(\widehat{u}, z) \leq \varepsilon$ gelten kann. Sei $L = \beta^X(\varepsilon)$. Da die Größe eines Balles in $\Gamma(G, X)$ nicht vom Mittelpunkt abhängt, gibt es höchstens $L(\varepsilon+t+C_n)$ Möglichkeiten für $\widehat{u}$. Für $x_{u,v}$ gibt es nach Konstruktion nur vier Möglichkeiten. Wenn $\widehat{u}$ und $x_{\widehat{u},\widehat{v}}$ feststehen, dann gibt es aber nur noch höchtens ein Element $\widehat{v} \in B^X_H(t)$ mit $\widehat{u}x_{\widehat{u},\widehat{v}}\widehat{v} = ux_{u,v}v$. Die Kardinalität der Urbilder von Elementen aus $B^X_H(s + t + C_n)$ bezüglich $\phi_n$ ist also durch $4L(\varepsilon + t + C_n)$ beschränkt.

□

**Theorem 3.2.5** *Es sei $G$ eine endlich erzeugte Untergruppe einer hyperbolischen Gruppe $K$ und $X$ ein endliches Erzeugendensystem von $G$. Sei weiter $H \leq G$ eine Untergruppe, welche eine freie nicht-abelsche Gruppe $\langle g, h\rangle \cong F(a, b)$ enthält. Dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ und eine linear beschränkte Abbildung $l : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, sodass die Ungleichung $\beta^X_H(s)\beta^X_H(t) \leq l(t)\beta^X_H(s+t+C_n)$ für alle $s, t \in \mathbb{N}$ und für alle natürlichen Zahlen $n \geq N$ erfüllt ist.*

*Beweis.* Zunächst kann $X$ zu einem endlichen Erzeugendensystem $Y$ von $K$ ergänzt werden. Dann gilt natürlich $\beta^X_H(s) \subset \beta^Y_H(s)$. Dann gibt es nach Theorem 3.2.4 ein $N \in \mathbb{N}$, sodass die Kardinalität der Urbilder der Elemente der Menge $B^Y_H(s + t + C_n)$, bezüglich der Abbildung

$$\phi_n : B^Y_H(s) \times B^Y_H(t) \to B^Y_H(s + t + C_n)$$

für jede natürliche Zahl $n \geq N$, durch eine feste lineare Abbildung $l$ beschränkt ist. Hierbei ist genauer $C_n := \max\{|g^n|_Y, |g^{-n}|_Y, |h^n|_Y, |h^{-n}|_Y\}$ die Konstante aus der Definition 3.2.2. Setzt man weiter $\widehat{C}_n := \max\{|g^n|_X, |g^{-n}|_X, |h^n|_X, |h^{-n}|_X\}$, so lässt sich die Abbildung $\phi_n$ zu einer wohldefinierten Abbildung

$$\phi_n : B_H^X(s) \times B_H^X(t) \to B_H^X(s + t + \widehat{C}_n)$$

einschränken, wobei die Kardinalität der Urbilder weiterhin durch $l(t)$ beschränkt ist. Mit Bemerkung 1.2.11 folgt nun die gewünschte Ungleichung.

□

**Korollar 3.2.6** *Es sei $K$ eine hyperbolische Gruppe und $G$ eine endlich erzeugte Untergruppe von $K$ mit Erzeugendensystem $X$. Dann existiert die relative exponentielle Wachstumsrate einer beliebigen Untergruppe $H \leq G$ bezüglich $X$.*

*Beweis.* Da $H$ auch eine Untergruppe von $K$ ist, sind nach Theorem 2.3.11 drei Fälle zu unterscheiden. Falls $H$ endlich ist, dann ist die Aussage klar. Angenommen $H$ enthält eine Untergruppe $\langle h \rangle \cong \mathbb{Z}$ vom endlichen Index. Nach Lemma 1.2.24 reicht es die Aussage für $\langle h \rangle$ zu prüfen. Nach Satz 2.2.2 ist $\langle h \rangle$ unverzerrt in $K$. Offenbar ist $\langle h \rangle$ also auch unverzerrt in $G$. Da $\mathbb{Z}$ bezüglich $\{h\}$ linear wächst, besitzt $\mathbb{Z}$ auch eine subexponentielle Mehrdeutigkeitsfunktion. Damit folgt die Aussage aus Korollar 1.2.19. Falls $H$ eine nicht-abelsche freie Untergruppe $\langle g, h \rangle$ enthält, so folgt aus Theorem 3.2.5, dass die Folge $\beta_H(n)$ die Eigenschaft $\beta_H^X(m)\beta_H^X(n) \leq l(t)\beta_H^X(m + n + C)$ für eine lineare Funktion $l$ und einer festen Konstante $C$ für jedes $m, n \in \mathbb{N}$ erfüllt. Damit folgt die Behauptung aus Satz 1.2.5.

□

Völlig analog ergibt sich nun die folgende Invariante für endlich erzeugte Gruppen, welche sich in hyperbolische Gruppen einbetten lassen.

**Korollar 3.2.7** *Es sei $G$ eine hyperbolische Gruppe mit Erzeugendensystem $X$. Dann besitzt jede endlich erzeugte Untergruppe $H \leq G$ eine lineare Mehrdeutigkeitsfunktion.*

*Beweis.* Es bleibt nur zu zeigen, dass virtuell zyklische Gruppen eine lineare Mehrdeutigkeitsfunktion besitzen. Dies ist jedoch trivial, da offenbar für jede virtuell zyklische Gruppe $G$ mit endlichem Erzeugendensystem $X$ eine Konstante $C \geq 0$ existiert, sodass $Cn \geq \beta^X(n)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ erfüllt ist.

$\square$

Mit Korollar 1.2.18 erhält man damit sofort das folgende Korollar.

**Korollar 3.2.8** *Es sei $H$ eine Untergruppe einer hyperbolischen Gruppe $G$. Sei $K$ eine beliebige endlich erzeugte Gruppe und $H \leq K$ eine Einbettung mit subexponentieller Verzerrung. Dann existiert die relative exponentielle Wachstumsrate von $H$ in $K$ bezüglich eines beliebigen endlichen Erzeugendensystems von $K$.*

# Kapitel 4

# Reduktion mit einem Element

Das Ziel dieses Kapitels ist der Nachweis einer stabilisierenden Wirkung eines zusätzlichen freien Erzeugers auf die relative exponentielle Wachstumsrate. Genauer wird gezeigt, dass für eine beliebige endlich erzeugte Gruppe $G$ mit endlichem Erzeugendensystem $X$ und einer Untergruppe $H$ von $G$, die relative exponentielle Wachstumsrate der Einbettung $H * \langle t \rangle \leq G * \langle t \rangle$ bezüglich des Erzeugendensystems $X \cup \{t\}$ existiert (vgl. Korollar 4.3.6). Hierfür soll zunächst eine reduzierte Variante von Bällen eingeführt werden.

## 4.1 Reduzierte Bälle

**Definition 4.1.1** Es sei $G$ eine Gruppe, $X$ ein Erzeugendensystem von $G$ und $M, S \subset G$ beliebige Teilmengen. Für $n \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ und $h \in G$ sei dann

$$B_G^X(h, n) = \{g \in G \mid d_X(g, h) \leq n\}$$

der Ball um $h$ mit Radius $n$. Allgemeiner wird der mit $S$ reduzierte Ball um $h$ mit Radius $n$ in $M$ durch

$$B_M^X(S; h, n) = \{g \in B_G^X(h, n) \mid \forall k \in S: \ d_X(kg, h) \geq d_X(g, h)\} \cap M$$

definiert. Zur besseren Übersicht beim späteren Gebrauch seien weiter

$$B_M^X(h, n) = B_M^X(\{1\}; h, n) \text{ und } B_M^X(g; n) = B_M^X(\{g, g^{-1}\}; 1, n).$$

Für die Kardinalitäten wird entsprechend $\beta_M^X(S; h, n) = |B_M^X(S; h, n)|$ bzw.

$$\beta_M^X(h, n) = |B_M^X(h, n)| \text{ und } \beta_M^X(g; n) = |B_M^X(g; n)|$$

gesetzt.

**Beispiel 4.1.2** Für $G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ und $X = \{(1, 0), (0, 1)\}$ gilt

$$B_G^X((1,-1);n) = \{(u,v) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : |u| + |v| \leq n \text{ und } u \cdot v \geq 0\}.$$

**Definition 4.1.3** Sei $G$ eine endlich erzeugte Gruppe mit Erzeugendensystem $X$ und $H$ eine beliebige Untergruppe. Sei weiter $h \in H$ fixiert. Dann gibt es für jedes Element $g \in G$ eine betragsmäßig größte Zahl $r_h(g) \in \mathbb{Z}$, sodass eine Kette der Form

$$|g|_X = |h^0 g|_X > |hg|_X > |h^2 g|_X > \ldots > |h^{r_h(g)} g|_X \text{ oder}$$

$$|g|_X = |h^0 g|_X > |h^{-1} g|_X > |h^{-2} g|_X > \ldots > |h^{r_h(g)} g|_X$$

existiert. Insbesondere ist $|h^{r_h(g)} g|_X \leq |g|_X$ und es gelten die beiden Ungleichungen

$$|hh^{r_h(g)} g|_X \geq |h^{r_h(g)} g|_X \text{ und } |h^{-1} h^{r_h(g)} g|_X \geq |h^{r_h(g)} g|_X.$$

Die Zahl $r_h(g)$ ist jedoch nur bis auf das Vorzeichen eindeutig. Wählt man daher für jedes $g$ ein passendes $r_h(g)$, so erhält man eine wohldefinierte Abbildung der Form

$$f_h : B_H^X(n) \to B_H^X(h;n),\ g \mapsto h^{r_h(g)} g.$$

Diese wird im Folgenden Reduktionsabbildung genannt.

**Bemerkung 4.1.4** Für $g \in B_H^X(h;n)$ ist offenbar $f_h(g) = g$. Es gilt also die Retraktionseigenschaft $f_h \circ f_h = f_h$.

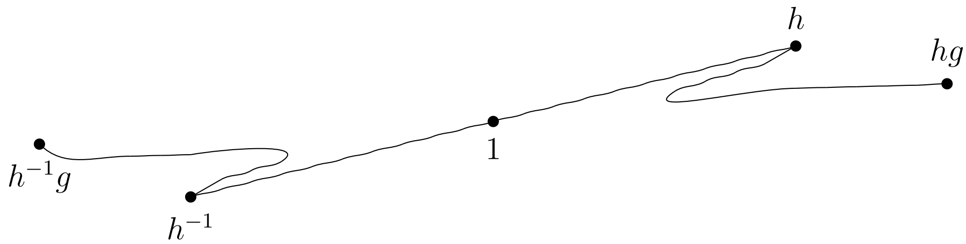


Abbildung 4.1: Für $g \in B_H^X(h;n)$ können die Geodäten $[h, hg]$ und $[h^{-1}, h^{-1}g]$ nur kurzzeitig zum neutralen Element zurücklaufen.

Falls man wegen der einfacheren Handhabung den Ball $B_H^X(n)$ durch einen reduzierten Ball $B_H^X(S;n)$ ersetzt, kann es passieren, dass zu wenig Elemente übrig bleiben, um gute Abschätzungen zu machen. Das nächste Korollar versichert jedoch, dass bei der Reduktion eines Balles bezüglich zwei zueinander inversen Elementen das Verhältnis zwischen $B_H^X(n)$ und $B_H^X(S;n)$ im geometrischen Mittel vernachlässigt werden kann.

**Lemma 4.1.5** *Sei $G$ eine endlich erzeugte Gruppe mit endlichem Erzeugendensystem $X$ und $H$ eine beliebige Untergruppe. Für jedes $h \in H$ sind die Urbilder einzelner Elemente unter der Reduktionsabbildung*

$$f_h : B_H(n) \to B_H^X(h; n)$$

*durch $2n + 1$ beschränkt.*

*Beweis.* Sei $k \in f_h^{-1}(g) \subset B_H(n)$. Dann gibt es ein $m \in \mathbb{Z}$ mit $k = h^m g$, sodass entweder eine Kette der Form

$$d_X(1, g) < d_X(1, hg) < d_X(1, h^2 g) < \ldots < d_X(1, h^m g)$$

oder eine Kette der Form

$$d_X(1, g) < d_X(1, h^{-1} g) < d_X(1, h^{-2} g) < \ldots < d_X(1, h^m g)$$

existiert. Da die Ketten spätestens nach $n + 1$ Schritten den Ball $B_H(n)$ verlassen, folgt $|m| \leq n$ und damit die Behauptung.

$\square$

Insbesondere ergibt sich damit die gewünschte Abschätzung.

**Korollar 4.1.6** *Sei $G$ eine endlich erzeugte Gruppe mit Erzeugendensystem $X$ und $H$ eine beliebige Untergruppe. Dann gilt für jedes $h \in H$ und jedes $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung $\beta_H^X(n) \leq (2n + 1)\beta_H^X(h; n)$.*

## 4.2 Reduktion für hyperbolische Gruppen

In diesem Abschnitt wird gezeigt wie man die Existenz der relativen exponentiellen Wachstumsrate von Untergruppen hyperbolischer Gruppen erhalten kann, indem man reduzierte Bälle nutzt. Im Gegensatz zum dritten Kapitel werden hierfür keine freien Untergruppen benötigt, sondern lediglich die Existenz hyperbolischer Elemente in unendlichen Untergruppen hyperbolischer Gruppen. Der Preis hierfür liegt lediglich darin, dass man dieses mal statt eines linearen Fehlerterms wie in Theorem 3.2.5 einen quadratischen Fehlerterm $\varepsilon$ für die Supermultiplikativität

$$\beta_H^X(m)\beta_H^X(n) \leq \varepsilon(n)\beta_H^X(m + n + C)$$

benötigt.

**Satz 4.2.1** *Sei $G$ eine $\delta$-hyperbolische Gruppe mit Erzeugendensystem $X$. Sei weiter $H \leq G$ eine Untergruppe mit einem Element $h \in H$ unendlicher Ordnung. Dann gibt es eine Konstante $A \geq 0$ und ein $N \in \mathbb{N}$, sodass für jedes $n \geq N$ und jedes Paar $(g, k) \in H \times B_H^X(h^n; \infty)$ mindestens eine der beiden Geodäten $[1, gh^n k]$ oder $[1, gh^{-n}k]$ durch den Ball $B_G^X(g, A)$ läuft.*

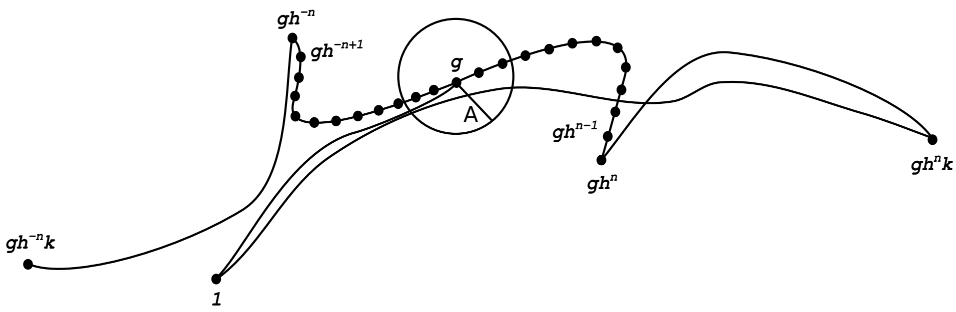


Abbildung 4.2: Die Geodäte $[1, gh^n k]$ läuft durch die $A$-Umgebung von $g$.

*Beweis.* Es soll Satz 2.1.14 angewandt werden. Setze hierfür

$$p_o = 1,\ p_t = g,\ x_o = gh^n,\ x_t = gh^n k,\ y_o = gh^{-n} \text{ und } y_t = gh^{-n}k.$$

Nach der Definition des reduzierten Balles $B_H^X(h^n; t)$ sind die Bedingungen

$$\begin{aligned} d_X(x_o, x_t) &= d_X(gh^n, gh^n k) = d_X(1, k) \\ &\leq d_X(1, h^n k) = d_X(g, gh^n k) = d_X(p_t, x_t) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} d_X(y_o, y_t) &= d_X(gh^{-n}, gh^{-n}k) = d_X(1, k) \\ &\leq d_X(1, h^{-n}k) = d_X(g, gh^{-n}k) = d_X(p_t, y_t) \end{aligned}$$

erfüllt. Nach Satz 2.2.2 und Satz 2.1.9 gibt es eine Konstante $C \geq 0$, sodass für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$(x_o, y_o)_{p_t} = (gh^n . gh^{-n})_g = (h^n . h^{-n})_1 \leq C$$

gilt. Wähle also $n$ so groß, dass die Ungleichung $d_X(h^n, 1) > 2C + 4\delta$ erfüllt ist. Dann gilt

$$d_X(x_o, p_t) = d_X(gh^n, g) = d_X(h^n, 1) > 2C + 4\delta$$

und ebenso

$$d_X(y_o, p_t) = d_X(gh^{-n}, g) = d_X(h^{-n}, 1) = d_X(h^n, 1) > 2C + 4\delta.$$

Damit sind die Voraussetzungen von Satz 2.1.14 erfüllt, sodass eine der beiden Geodäten $[1, gh^n k]$ oder $[1, gh^{-n}k]$ durch den Ball mit Radius $2C + 7\delta + 1$ um $g$ läuft.

□

Mit Hilfe von Satz 4.2.1 kann nun eine reduzierte Version der Mehrdeutigkeitsfunktion definiert werden.

**Definition 4.2.2** Definiere in der Situation von Satz 4.2.1 die Abbildung

$$\varphi_n : H \times B_H^X(h^n; \infty) \to H,\ (g, k) \mapsto gh^{\varepsilon n}k,$$

wobei $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ so gewählt ist, dass $[1, gh^{\varepsilon n}k]$ durch den Ball mit Radius $A$ um $g$ läuft.

Der Beweis des folgenden Satzes verläuft völlig analog zum Beweis von Theorem 3.2.4 und wird daher weggelassen.

**Satz 4.2.3** *Sei $G$ eine $\delta$-hyperbolische Gruppe mit Erzeugendensystem $X$. Sei weiter $H \leq G$ eine Untergruppe mit einem Element $h \in H$ unendlicher Ordnung. Dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, sodass zu jedem $n \geq N$ zwei feste Zahlen $a, b \geq 0$ mit der folgenden Eigenschaft existieren.*

- *Für alle natürlichen Zahlen $l, m \in \mathbb{N}$ ist die Größe der Urbilder einzelner Elemente bezüglich den Einschränkungen*

  $$\varphi_n^{(l,m)} : B_H^X(l) \times B_H^X(h^n; m) \to B_H^X(l + m + |h^n|_X),\ \ (g, k) \mapsto \varphi_n((g, k))$$

  *durch $am + b$ beschränkt.*

Nach der Klassifikation der Untergruppen hyperbolischer Gruppen enthält jede unendliche Untergruppe einer hyperbolischen Gruppe ein Element unendlicher Ordnung. Ersetzt man die Potenz $h^n$ durch $h$ und setzt $C = |h|_X$, so ergibt sich aus Satz 4.2.3 und Bemerkung 1.2.11 das folgende Korollar.

**Korollar 4.2.4** *Es sei $G$ eine hyperbolische Gruppe mit endlichem Erzeugendensystem $X$. Sei weiter $H \leq G$ eine unendliche Untergruppe. Dann gibt es ein Element $h \in H$, eine Abbildung $L(x) = ax + b$ und eine Konstante $C \geq 0$, sodass die Abschätzung*

$$\beta_H^X(l)\beta_H^X(h;m) \leq L(m)\beta_H^X(l+m+C)$$

*für alle $l, m \in \mathbb{N}$ erfüllt ist.*

**Korollar 4.2.5** *Sei $G$ eine $\delta$-hyperbolische Gruppe mit Erzeugendensystem $X$ und $H \leq G$ eine unendliche Untergruppe. Dann gibt es ein quadratisches Polynom $P$ und eine Konstante $C \geq 0$, sodass die Ungleichung*

$$\beta_H^X(l)\beta_H^X(m) \leq P(m)\beta_H^X(l+m+C)$$

*für alle $l, m \in \mathbb{N}$ erfüllt ist.*

*Beweis.* Nach Korollar 4.2.4 und Lemma 4.1.5 gibt es eine Abbildung $L(x) = ax + b$ und eine Konstante $C$, sowie ein Element $h \in H$, sodass die Ungleichungen

$$\beta_H^X(l)\beta_H^X(m) \leq \beta_H^X(l)(2m+1)\beta_H^X(h;m) \leq (2m+1)L(m)\beta_H^X(l+m+C)$$

für alle $l, m \in \mathbb{N}$ erfüllt sind.

□

## 4.3 Stabilisierende Einbettung

In diesem Abschnitt soll gezeigt werden, dass die relative exponentielle Wachstumsrate der kanonischen Inklusion $H * \langle t \rangle \leq G * \langle t \rangle$ existiert, wobei $H$ eine beliebige Untergruppe einer endlich erzeugten Gruppe $G$ ist. Zunächst soll der bezüglich der Menge $\{t, t^{-1}\}$ reduzierte Ball $B_{H*\langle t \rangle}^{X \cup \{t\}}(t; n)$ in eine äquivalente Form gebracht werden.

**Lemma 4.3.1** *Sei $G$ eine endlich erzeugte Gruppe mit endlichem Erzeugendensystem $X$ und sei $H$ eine beliebige von $G$. Sei weiter $M$ die Menge aller Elemente $w \in H * \langle t \rangle \leq G * \langle t \rangle$, welche eine reduzierte Darstellung der Form $h_1 t^{\varepsilon_1} h_2 t^{\varepsilon_2} \cdots h_n t^{\varepsilon_n}$ mit $h_1 \neq 1$ besitzen. Dann gilt*

$$B_{H*\langle t \rangle}^Y(t; n) = B_M^Y(n) \cup \{1\}.$$

*Beweis.* Die einzigen anderen möglichen reduzierten Darstellungen sind von der Form $w = t^{\varepsilon_1} h_1 t^{\varepsilon_2} h_2 \cdots t^{\varepsilon_n} h_n$ mit $\varepsilon_1 \neq 0$. Für solche wäre aber offenbar $|tw|_Y < |w|_Y$ oder $|t^{-1}w|_Y < |w|_Y$. Dies widerspricht jedoch der Definition des reduzierten Balles $B_{H*\langle t \rangle}^Y(t; n)$.

□

**Definition 4.3.2** Sei $G$ eine endlich erzeugte Gruppe mit Erzeugendensystem $X$ und $Y := X \cup \{t\}$ ein Erzeugendensystem von $G * \langle t \rangle$. Es sei weiter

$$\phi : B^Y_{H*\langle t\rangle}(m) \times B^Y_{H*\langle t\rangle}(t;n) \to B^Y_{H*\langle t\rangle}(m+n+1),\ (v,w) \mapsto vt^\varepsilon w,$$

wobei $\varepsilon = -1$ ist, falls $v$ eine reduzierte Darstellung der Form $t^{\varepsilon_1}h_1t^{\varepsilon_2}h_2\cdots t^{\varepsilon_n}$ mit $\varepsilon_n < 0$ hat. Im Falle von $\varepsilon_n \geq 0$ wird $\varepsilon = 1$ gesetzt.

Mit dieser Notation ergibt sich nun der folgende Satz.

**Satz 4.3.3** *Die Urbilder einzelner Elemente bezüglich der Abbildung $\phi$ sind durch eine lineare Funktion in $n$ beschränkt.*

*Beweis.* Es seien

$$(x,y),(z,w) \in B^Y_{H*\langle t\rangle}(m) \times B^Y_{H*\langle t\rangle}(t;n)$$

mit reduzierten Darstellungen

$$\begin{aligned} x &= t^{\varepsilon_1}f_1t^{\varepsilon_2}f_2\cdots t^{\varepsilon_{m_1}}f_{m_1},\\ y &= g_1t^{\delta_2}g_2\cdots t^{\delta_{n_1}}g_{n_1},\\ z &= t^{\mu_1}h_1t^{\mu_2}h_2\cdots t^{\mu_{m_2}}h_{m_2},\\ w &= k_1t^{\nu_2}k_2\cdots t^{\nu_{n_2}}k_{n_2} \end{aligned}$$

gegeben. Angenommen es gilt $\phi(x,y) = \phi(z,w)$, also ist $xt^\alpha y = zt^\beta w$, wobei $\alpha$, $\beta \in \{-1,1\}$ so gewählt sind, dass die Wörter

$$\begin{aligned} xt^\alpha y &= t^{\varepsilon_1}f_1t^{\varepsilon_2}f_2\cdots t^{\varepsilon_{m_1}}f_{m_1}\ t^\alpha g_1t^{\delta_2}g_2\cdots t^{\delta_{n_1}}g_{n_1} \text{ und}\\ zt^\beta w &= t^{\mu_1}h_1t^{\mu_2}h_2\cdots t^{\mu_{m_2}}h_{m_2}\ t^\beta k_1t^{\nu_2}k_2\cdots t^{\nu_{n_2}}k_{n_2} \end{aligned}$$

reduziert sind. Dann folgt aus der Eindeutigkeit der Darstellung, dass die reduzierte Darstellung von $xt^\alpha y$ mit dem Wort $t^\beta k_1t^{\nu_2}k_2\cdots t^{\nu_{n_2}}k_{n_2}$ endet. Ohne Einschränkung kann $k_1 \neq 1$ angenommen werden. Die Wahl des Erzeugendensystems impliziert nun $n_2 \leq n$. Daher gibt es höchstens $n$ Möglichkeiten für die Wahl von $w$. Nun hat $\beta$ nur 2 Möglichkeiten und bei festem $w$ und $\beta$ gibt es nur noch höchstens eine mögliche Wahl für $z$. Damit ist alles gezeigt.

□

**Korollar 4.3.4** *Es sei $G$ eine endlich erzeugte Gruppe mit Erzeugendensystem $X$ und $H \leq G$ eine beliebige Untergruppe. Dann existiert eine lineare Abbildung $l$, sodass für alle $m, n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung*

$$\beta_{H*\langle t\rangle}^{X\cup\{t\}}(m)\beta_{H*\langle t\rangle}^{X\cup\{t\}}(t;n) \leq l(n)\beta_{H*\langle t\rangle}^{X\cup\{t\}}(m+n+1)$$

*erfüllt ist.*

Wie im obigen Abschnitt erhält man nun quadratische Supermultiplikativität.

**Korollar 4.3.5** *Es sei $G$ eine endlich erzeugte Gruppe mit Erzeugendensystem $X$ und $H \leq G$ eine beliebige Untergruppe. Dann existiert ein quadratisches Polynom $P$, sodass für alle $m, n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung*

$$\beta_{H*\langle t\rangle}^{X\cup\{t\}}(m)\beta_{H*\langle t\rangle}^{X\cup\{t\}}(n) \leq P(n)\beta_{H*\langle t\rangle}^{X\cup\{t\}}(m+n+1)$$

*erfüllt ist.*

Aus Satz 1.2.17 folgt nun sofort das gewünschte Resultat.

**Korollar 4.3.6** *Es sei $G$ eine endlich erzeugte Gruppe mit Erzeugendensystem $X$ und $H \leq G$ eine beliebige Untergruppe. Dann existiert die relative exponentielle Wachstumsrate der kanonischen Einbettung $H * \langle t\rangle \leq G * \langle t\rangle$ bezüglich des Erzeugendensystems $X \cup \{t\}$.*

# Kapitel 5

# Produkte hyperbolischer Gruppen

Es hat sich mittlerweile herausgestellt, dass die Untergruppenstruktur von Produkten hyperbolischer Gruppen einige interessante Eigenschaften bereithält. Beispielsweise haben Baumslag und Roseblade gezeigt, dass es überabzählbar viele Isomorphieklassen von Untergruppen in $F_2 \times F_2$ gibt [BR84, Theorem 1]. Zudem haben Bridson und Grunewald eine Frage Grothendiecks beantwortet, indem sie gezeigt haben, dass es eine endlich erzeugte, residuell endliche, hyperbolische Gruppe $H$ gibt, welche eine endlich präsentierbare Untergruppe $\iota : P \hookrightarrow H \times H$ mit $P \ncong H \times H$ enthält, sodass die Inklusion $\iota$ einen Isomorphismus $\widehat{P} \cong \widehat{H \times H}$ auf den profiniten Abschlüssen von $P$ und $H \times H$ induziert [BG04, Theorem 1.1]. Unabhängig von der komplizierten Untergruppenstruktur, stellt sich jedoch heraus, dass die relative exponentielle Wachstumsrate von Untergruppen von Produkten torsionsfreier, hyperbolischer Gruppen, zumindest für bestimmte Erzeugendensysteme, existiert.

## 5.1 Notation

Jedem Element $j$ einer Indexmenge $I = \{1, \ldots, N\}$ sei eine hyperbolische Gruppe $G_j$ zugeordnet. Für eine Teilmenge $J \subset I$ seien

$$\iota_J : \prod_{i \in J} G_i \to \prod_{i \in I} G_i$$

die kanonische Inklusion und

$$\psi_J : \prod_{i \in I} G_i \to \prod_{i \in J} G_i$$

die kanonische Projektion. Um die relative exponentielle Wachstumsrate der Untergruppen des Produktes $G = \prod_{i\in I} G_i$ einfacher handhaben zu können, wird im Folgenden immer ein Erzeugendensystem der Form $X = \bigcup_{i\in I} \iota_i(X_i)$ für $G$ betrachtet, wobei $X_i$ jeweils ein Erzeugendensystem von $G_i$ ist.

**Bemerkung 5.1.1** *Offenbar gilt die Gleichung*

$$|(g_1, \ldots, g_N)|_X = \sum_{i=1}^{N} |g_i|_{X_i}.$$

## 5.2 Konstruktion des Verbindungsstückes

Um Elemente aus einer Untergruppe $H \leq \prod_{i\in I} G_i$ zusammenzusetzen, wird in diesem Abschnitt eine endliche Teilmenge $M \subset H$ von Mittelstücken konstruiert, sodass für jedes Paar $(u, v)$ aus $H \times H$ ein $h \in M$ existiert, sodass die Zusammensetzungen $uhv$ relativ selten übereinstimmen. Dafür wird die Indexmenge $I$ so in $I_1$ und $I_2$ zerlegt, dass sich $H$ als Funktionsgraph eines Homomorphismus $f : \psi_{I_1}(H) \to \psi_{I_2}(H)$ schreiben lässt.

**Definition und Lemma 5.2.1** *Es seien $G_1, \ldots, G_N$ beliebige Gruppen und $H \leq G = \prod_{j=1}^{N} G_j$ eine beliebige Untergruppe. Dann existiert eine disjunkte Zerlegung der Menge $I = \{1, \ldots, N\}$ in $I_1$ und $I_2$, sowie Morphismen $f_i : \psi_{I_1}(H) \to G_i$ für jedes $i \in I_2$, sodass die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind.*

1) *Ist $(g_1, \ldots, g_N) \in H$, so ist jeder Eintrag $g_i$ mit $i \in I_2$ von der Form $g_i = f_i((g_j)_{j\in I_1})$.*

2) *Zu jedem $i \in I_1$ gibt es ein nichttriviales $g_i \in G_i$, sodass $H$ ein Element der Form $(g_1, \ldots, g_N)$ mit $g_j = 1$ für $j \in I_1 \backslash \{i\}$ enthält.*

*Beweis.* Es sei $I_1 \subset I$ minimal mit der Eigenschaft, dass die Einschränkung der Projektion

$$\prod_{i\in I} G_i \xrightarrow{\psi_{I_1}} \prod_{i\in I_1} G_i$$

auf $H$ injektiv ist und $I_2 = I \backslash \{I_1\}$. Dann gibt es zu jedem Tupel $(g_i)_{i\in I_1}$ höchstens ein Tupel $(g_i)_{i\in I_2}$, sodass $(g_i)_{i\in I}$ in $H$ liegt. Daher kann im Fall $(g_i)_{i\in I} \in H$ und $j \in I_2$ die Funktion $f_j$ durch $f_j((g_i)_{i\in I_1}) = g_j$ definiert werden. Sind nun zwei Elemente $(g_i)_{i\in I}, (h_i)_{i\in I} \in H$ gegeben, so gilt wegen $(g_i)_{i\in I}(h_i)_{i\in I} = (g_ih_i)_{i\in I}$, zum einen $g_jh_j = f_j((g_i)_{i\in I_1})f_j((h_i)_{i\in I_1})$ für $j \in I_2$ und zum anderen $g_jh_j = f_j((g_ih_i)_{i\in I_1})$ für $j \in I_2$. Es folgt also $f_j((g_ih_i)_{i\in I_1}) = f_j((g_i)_{i\in I_1})f_j((h_i)_{i\in I_1})$. Ist $i \in I_1$, so folgt aufgrund der Minimalität von $I_1$, dass die Komposition $\psi_i \circ \psi_{I_1} = \psi_{I_1\setminus\{i\}}$ nicht injektiv ist. Es gibt also ein $k_i \in H$ mit $k_i = (g_1, \dots, g_N) \neq (1, \dots, 1)$ und $\psi_{I_1\setminus\{i\}}(k) = (1, \dots, 1)$. Also $g_i = 1$ für $i \in I_1\setminus\{i\}$. Da alle $f_i$ ein Homomorphismus ist, kann $g_i$ nicht trivial sein, da andernfalls $f_i((g_l)_{l\in I_1}) = f_i((1, \dots, 1)) = 1$ folgen würde und damit $k_j = 1$ im Widerspruch zur Voraussetzung.

□

**Definition und Lemma 5.2.2** *Es seien $G_1, \dots, G_N$ hyperbolische Gruppen und $H \leq G = \prod_{j=1}^{N} G_j$ eine beliebige Untergruppe. Dann gibt es eine disjunkte Zerlegung der Menge $I = \{1, \dots, n\}$ in Teilmengen $I_1$ und $I_2$ sowie eine Zerlegung von $I_1 = I_1^1 \cup I_1^2$ und Morphismen $f_i : \psi_{I_1}(H) \to G_i$ für $i \in I_2$, sodass die folgenden Bedingungen erfüllt sind.*

1) *Jeder Eintrag $g_i$ mit $i \in I_2$ eines Elementes $(g_1, \dots, g_N) \in H$ ist von der Form $g_i = f_i((g_j)_{j\in I_1})$.*

2) *Zu jedem $i \in I_1$ gibt es ein nichttriviales $g_i \in G_i$, sodass $H$ ein Element der Form $(g_1, \dots, g_N)$ enthält mit $g_j = 1$ für $j \in I_1\setminus\{i\}$.*

3) *Für jedes $i \in I_1^1$ ist die Untergruppe $\psi_i(H) \leq G_i$ virtuell zyklisch.*

4) *Für jedes $i \in I_1^2$ enthält die Untergruppe $\psi_i(H) \leq G_i$ eine nicht-abelsche freie Gruppe.*

*Beweis.* Die Existenz einer solchen Zerlegung folgt unmittelbar aus Lemma 5.2.1 und der, durch Theorem 2.3.11 gegebenen, Klassifikation von Untergruppen hyperbolischer Gruppen.

□

**Lemma 5.2.3** *Es sei $G$ eine hyperbolische Gruppe und $g \in G$ ein Element unendlicher Ordnung. Sei $H \cong F(a, b)$ eine Untergruppe von $G$. Dann gibt es ein Element $w \in \{a, b\}$ und ein $N \in \mathbb{N}$, sodass die beiden Elemente $g^N$ und $wg^Nw^{-1}$ ein freies Erzeugendensystem der Gruppe $\langle g^N, wg^Nw^{-1}\rangle$ bilden.*

*Beweis.* Nach Korollar 2.2.5 gibt es zu jedem Element $w \in F(a, b)$, entweder ein $N \in \mathbb{N}$, sodass $g^N$ und $wg^Nw^{-1}$ ein freies Erzeugendensystem der Gruppe

$\langle g^N, wg^Nw^{-1}\rangle$ ist, oder die Gleichung $g^m = (wgw^{-1})^n = wg^nw^{-1}$ für passende Potenzen $m, n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ gilt. Nach Lemma 2.2.6 müsste dann im zweiten Fall $m \in \{-n, n\}$ sein. Wegen

$$w^2g^nw^{-2} = wg^{\pm n}w^{-1} = (wg^nw^{-1})^{\pm 1} = (g^{\pm n})^{\pm 1} = g^n$$

wäre $w^2 \in C_G(\langle g^n\rangle)$. Betrachtet man speziell $w = a$ bzw. $w = b$, dann wäre also $a^2 \in C_G(\langle g^n\rangle)$ bzw. $b^2 \in C_G(\langle g^n\rangle)$ und damit $F(a, b) \cong F(a^2, b^2) \leq C_G(\langle g^n\rangle)$. Dies steht jedoch im Widerspruch zur zweiten Aussage von Satz 2.2.2.

□

**Lemma 5.2.4** *Es seien $G_1, \ldots, G_N$ torsionsfreie, hyperbolische Gruppen und $H \leq G = \prod_{j=1}^{N} G_j$ eine beliebige Untergruppe. Sei $I = I_1^1 \dot\cup I_1^2 \dot\cup I_2$ eine Zerlegung wie in Definition 5.2.2. Dann gibt es zu jedem $i \in I_1^2$ zwei Elemente $a_i, b_i \in G_i$ mit $\langle a_i, b_i\rangle \cong F(a, b)$, sodass zwei Tupel $(g_j)_{j\in I}$ und $(h_j)_{j\in I} \in H$ existieren, für welche zum einen $g_i = a_i$ und $h_i = b_i$ ist und zum anderen $g_j = 1$ und $h_j = 1$ für jedes $j \in I_1\backslash\{i\}$ gelten.*

*Beweis.* Es sei $i \in I_1^2$. Zunächst gibt es nach Voraussetzung ein $(k_j)_{j\in I} \in H$ mit $k_i \neq 1$ und $k_j = 1$ für $j \in I_1\backslash\{i\}$. Damit hat also $k_i$ nach Voraussetzung unendliche Ordnung in $G_i$. Aufgrund der Definition von $I_1^2$ gibt es Elemente $(x_j)_{j\in I}, (y_j)_{j\in I} \in H$ mit $\langle x_i, y_i\rangle \cong F(x, y)$. Ohne Einschränkung kann nun nach Lemma 5.2.3 angenommen werden, dass die Elemente $k_i^{n_i}, x_ik_i^{n_i}x_i^{-1}$ für ein passendes $n_i \in \mathbb{N}$ ein freies Erzeugendensystem der Gruppe $\langle k_i^{n_i}, x_ik_i^{n_i}x_i^{-1}\rangle$ bilden. Nun erhält man mit den Definitionen

$$(g_j)_{j\in I} := (k_j^{n_j})_{j\in I} \in H \text{ und } (h_j)_{j\in I} := (x_jk_j^{n_j}x_j^{-1})_{j\in I} \in H$$

die gewünschten Eigenschaften

$$g_j = k_j^{n_j} = 1 \text{ und } h_j = x_jk_j^{n_j}x_j^{-1} = x_j1x_j^{-1} = 1 \text{ für } j \in I_1\backslash\{i\}$$

sowie

$$\langle g_i, h_i\rangle = \langle k_j^{n_j}, x_jk_j^{n_j}x_j^{-1}\rangle \cong F(x, y).$$

□

**Lemma 5.2.5** *Es seien $G_1, \ldots, G_N$ torsionsfreie, hyperbolische Gruppen und $H \leq G = \prod_{j=1}^{N} G_j$ eine beliebige Untergruppe. Wähle eine disjunkte Zerlegung*

*$I = \{1, \dots, N\} = I_1 \cup I_2 = I_1^1 \cup I_1^2 \cup I_2$ wie in Lemma 5.2.2. Dann gibt es eine endliche Teilmenge $M \subset H$ und ein $\varepsilon \in \mathbb{N}$, sodass für jedes Paar $(u, v) \in B_H(m) \times B_H(n)$ ein $x_{u,v} \in M$ existiert, für welches die Projektion jeder Geodäten $[1, ux_{u,v}v] \subset \Gamma(G, X)$ für jedes $i \in I_1^2$ nach $\Gamma(G_i, X_i)$ durch den Ball $B^{X_i}(\psi_i(u), \varepsilon) = B^{X_i}(u_i, \varepsilon)$ verläuft.*

*Beweis.* Wähle eine disjunkte Zerlegung $I = \{1, \dots, N\} = I_1 \cup I_2 = I_1^1 \cup I_1^2 \cup I_2$ wie in Lemma 5.2.2. Dann existieren nach Lemma 5.2.4 zu jedem $i \in I_1^2$ zwei Elemente $(g_{j,i})_{j\in I}, (h_{j,i})_{j\in I} \in H$, sodass $g_{i,i}$ und $h_{i,i}$ jeweils eine Basis der freien Gruppe $\langle g_{i,i}, h_{i,i}\rangle \cong F(a, b)$ bilden und die Elemente $g_{j,i}$ und $h_{j,i}$ für jedes $j \in I_1 \backslash \{i\}$ trivial sind. Nach Theorem 3.2.3 gibt es dann jeweils ein $N_i \in \mathbb{N}$ und ein $\varepsilon_i \geq 0$, sodass für jedes $n \geq N_i$ und für je zwei Elementen $u, v \in G_i$, ein $x_{u,v} \in \{g_{i,i}^n, h_{i,i}^n, g_{i,i}^{-n}, h_{i,i}^{-n}\}$ existiert, für welches jede Geodäte $[1, ux_{u,v}v]$ die $\varepsilon_i$-Umgebungen der Punkte $u$ und $ux_{u,v}$ durchläuft. Seien nun $L = \max\limits_{i\in I_1^2} N_i$ und $\varepsilon = \max\limits_{i\in I_1^2} \varepsilon_i$. Setzt man nun

$$M = \{ \prod_{i\in I_1^2} \tau_i \mid \tau_i \in \{(g_{j,i}^L)_{j\in I}, (h_{j,i}^L)_{j\in I}, (g_{j,i}^{-L})_{j\in I}, (h_{j,i}^{-L})_{j\in I}\}\},$$

so kann man offenbar zu jedem $(u, v) \in B_H(m) \times B_H(n)$ ein passendes $x_{u,v} \in M$ gewählt werden, sodass die Aussage des Lemmas erfüllt ist.

□

**Definition 5.2.6** Wir fixieren nun zu jedem $(u, v) \in B_H(m) \times B_H(n)$ ein gemäß Lemma 5.2.5 passendes $x_{u,v} \in M$ und definieren hierdurch die Abbildung

$$\phi : B_H(m) \times B_H(n) \to B_H(m + n + c),\ (u, v) \mapsto ux_{u,v}v.$$

Hierbei wird notwendigerweise $c = \max\limits_{h\in M} |h|_X$ gesetzt.

## 5.3 Existenz des Grenzwertes

**Theorem 5.3.1** *Es seien $G_1, \dots, G_N$ torsionsfreie, hyperbolische Gruppen und $H \leq G = \prod_{j=1}^{N} G_j$ eine beliebige Untergruppe. Dann gibt es ein Polynom $P : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ und eine Konstante $c \geq 0$, sodass die Urbilder einzelner Elemente bezüglich der Abbildung*

$$\phi : B_H(m) \times B_H(n) \to B_H(m + n + c)$$

*durch $P(n)$ beschränkt sind.*

*Beweis.* Es seien also $u = (u_1, \dots, u_N) \in B_H(m)$ und $v = (v_1, \dots, v_N) \in B_H(n)$ vorgegeben. Das Ziel ist es die Anzahl der möglichen Kombinationen $u' x_{u',v'} v'$ mit

$$(u', v') = ((u'_1, \dots, u'_N), (v'_1, \dots, v'_N)) \in B_H(m) \times B_H(n)$$

und $x_{u',v'} \in M$ abzuschätzen, sodass die Gleichung $\phi(u, v) = \phi(u', v')$ erfüllt ist. Es gelte also $u x_{u,v} v = u' x_{u',v'} v'$ bzw. $u_j x_{u_j,v_j} v_j = u'_j x_{u'_j,v'_j} v'_j$ für jedes $j \in I$. Zunächst sollen die Möglichkeiten für $u'_i$ mit $i \in I_1^2$ abgeschätzt werden. Nach Lemma 5.2.5 gibt es eine von $m$ und $n$ unabhängige Konstante $\varepsilon_i$, sodass $u'_i$ in der $\varepsilon_i$-Umgebung bezüglich $d_{X_i}$ der Geodäte $[1, u'_i x_{u'_i,v'_i} v'_i] = [1, u_i x_{u_i,v_i} v_i]$ liegt. Es gibt also einen Punkt $p$ auf der Geodäten $[1, u_i x_{u_i,v_i} v_i]$ mit $u'_i \in B_{G_i}^{X_i}(p, \varepsilon_i)$. Es sei $M \subset H$ die Menge aus der Konstruktion von $\phi$. Da diese endlich ist, kann $K = \max\limits_{(h,i) \in M \times I} |\psi_i(h)|_{X_i}$ gesetzt werden. Nach der Wahl des Erzeugendensystems $X$ von $G$ gilt nun $|v'_i|_{X_i} \le |v'|_X \le n$ und man erhält

$$\begin{aligned} d_{X_i}(u'_i, u_i x_{u_i,v_i} v_i) &= d_{X_i}(u'_i, u'_i x_{u'_i,v'_i} v'_i) = d_{X_i}(1, x_{u'_i,v'_i} v'_i) \\ &\le |x_{u'_i,v'_i}|_{X_i} + |v'_i|_{X_i} \le K + n. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich

$$d_{X_i}(p, u_i x_{u_i,v_i} v_i) \le d_{X_i}(p, u_i x_{u_i,v_i} v_i) + d_{X_i}(p, u_i x_{u_i,v_i} v_i) \le \varepsilon_i + K + n.$$

Es gibt also höchstens $\varepsilon_i + K + n$ Möglichkeiten für $p$ und nach obiger Argumentation gibt es für jedes $p$ höchstens $L = \beta_{G_i}^{X_i}(\varepsilon_i)$ Möglichkeiten für $u'_i$. Es gibt also eine von $n$ unabhängige Konstante $A \ge 0$, sodass die Möglichkeiten für $u'_i$ durch $An$ beschränkt sind. Es sollen nun die Möglichkeiten für $u'_i$ mit $i \in I_1^1$ abgeschätzt werden. Zunächst ist wieder $|v_i|_{X_i} \le |v|_X \le n$. Da $\psi_i(H)$ jedoch virtuell zyklisch ist, und nach Satz 2.2.2 zyklische Untergruppen hyperbolischer Gruppen quasiisometrisch eingebettet sind, gibt es Konstanten $L_i \ge 0$, sodass für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Abschätzung $\beta_{\psi_i(H)}^{X_i}(n) \le L_i n$ gilt. Setzt man also $L = \max\limits_{i \in I_1^1} L_i$, so sind die Möglichkeiten für alle $u'_i$ mit $i \in I_1^1$ durch $(Ln)^{|I_1^1|}$ beschränkt. Nach Konstruktion gibt es nun für jedes Tupel $(u'_i)_{i \in I_1}$ höchstens ein Tupel $(u'_i)_{i \in I_2}$, sodass $(u'_i)_{i \in I}$ überhaupt in $H$ liegt. Da es nur endlich viele Möglichkeiten für die Wahl von $x_{u,v}$ gibt, ist alles gezeigt.

□

Mit Bemerkung 1.2.11 ergibt sich nun das folgende Korollar sofort aus Theorem 5.3.1.

**Korollar 5.3.2** *Es seien $G_1, \dots, G_N$ torsionsfreie, hyperbolische Gruppen und $H \leq G = \prod_{j=1}^{N} G_j$ eine beliebige Untergruppe. Dann gibt es ein Polynom $P : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ und eine Konstante $c \geq 0$, sodass für alle $m, n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung $\beta_H^X(m)\beta_H^X(n) \leq P(n)\beta_H^X(m+n+c)$ erfüllt ist.*

Aus Korollar 5.3.2 und Satz 1.2.17 ergibt sich nun direkt das gewünschte Resultat:

**Korollar 5.3.3** *Es seien $G_1, \dots, G_N$ torsionsfreie, hyperbolische Gruppen und $H \leq G = \prod_{j=1}^{N} G_j$ eine beliebige Untergruppe. Dann existiert die relative exponentielle Wachstumsrate von $H$ in $G$ bezüglich jedes Erzeugendensystems der Form $X = \bigcup_{1 \leq i \leq N} \iota_i(X_i)$, wobei $X_i$ ein Erzeugendensystem von $G_i$ ist.*

Mit ein wenig mehr technischem Aufwand könnte man vermutlich das Resultat auf beliebige Untergruppen aller Produkte hyperbolischer Gruppen ausdehnen. Das folgende Lemma ist bei Überlegungen zu möglichen Konstruktion eines Verbindungsstückes für den Fall entstanden, dass die hyperbolischen Faktoren Torsion enthalten dürfen.

**Lemma 5.3.4** *Es seien $G_1, \dots, G_N$ hyperbolische Gruppen und $H \leq G = \prod_{j=1}^{N} G_j$ eine beliebige Untergruppe. Seien $\psi_j : G \to G_j$ die kanonischen Projektionen. Angenommen die Bilder $\psi_j(H) \leq G_j$ sind unendlich. Dann gibt es ein Element der Form $h = (h_1, \dots, h_N) \in H$, sodass jedes $h_j \in G_j$ unendliche Ordnung hat.*

*Beweis.* Das gewünschte Element soll nun induktiv konstruiert werden.

Behauptung: Zu jedem $m \leq N$ gibt es ein Element $(h_1, \dots, h_N) \in H$, sodass $h_i$ für jedes $i \leq m$ unendliche Ordnung hat.

Da jedes $G_j$ hyperbolisch ist und $\psi_j(H) \leq G_j$ unendlich ist, gibt es nach Theorem 2.3.11 zu jedem $j \in \{1, \dots, N\}$ ein Element $h = (h_1, \dots, h_N) \in H$, sodass $h_j$ unendlicher Ordnung in $G_j$ besitzt. Damit ist der Fall $m = 1$ schon gezeigt. Angenommen das Element $(h_1, \dots, h_N) \in H$ erfüllt die Behauptung für ein $m < N$. Es sei $(g_1, \dots, g_N) \in H$ ein Elemente, sodass $g_{m+1}$ unendliche Ordnung hat. Dann kann man $k \in \mathbb{N}$ so groß wählen, dass die Komponenten in $(h_1^k, \dots, h_N^k)$ und $(g_1^k, \dots, g_N^k)$ entweder trivial sind oder unendliche Ordnung haben. Es kann also angenommen werden, dass

$(g_1, \dots, g_N)$ und $(h_1, \dots, h_N)$ schon von dieser Form sind. Nach Theorem 2.2.3 gibt es dann für jedes $i \in \{1, \dots, m+1\}$ ein $p_i \in \mathbb{N}$, sodass $\langle g_i^{p_i}, h_i^{p_i} \rangle$ eine freie Gruppe von Rang 1 oder 2 ist. Setzt man also $P = \prod_{i=1}^{m+1} p_i$ so ist auch $\langle g_i^P, h_i^P \rangle$ eine freie Gruppe vom Rang 1 oder 2. Sei $J$ die Indexmenge aller $j \leq m+1$, für die entweder $g_j$ trivial ist oder $\langle g_j^P, h_j^P \rangle$ frei von Rang 2 ist. Setze $\sigma_i = g_i^P$ und $\tau_i = h_i^P$ für $i \in \{1, \dots, N\}$. Dann hat das Element $\sigma_i^k \tau_i^l$ für jedes $i \in J$ und jedes Paar $(k, l) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ mit $k, l \neq 0$ unendliche Ordnung in $G_i$. Für $i \in \{1, \dots, m+1\} \backslash J$ bleibt nach Konstruktion nur die Möglichkeit $\langle \sigma_i, \tau_i \rangle \cong \mathbb{Z}$. Es gibt also Tupel $(k_i, l_i) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ mit $k_i, l_i \neq 0$ und $\sigma_i^{k_i} = \tau_i^{l_i} \neq 1$. Für $L = \prod_{i \in \{1, \dots, m+1\} \backslash J} l_i$ gilt damit

$$\tau_i^L = \tau_i^{l_i (L l_i^{-1})} = \sigma_i^{k_i (L l_i^{-1})}.$$

Wählt man nun $M \in \mathbb{N}$ groß genug, dann erhält man

$$\sigma_i^M \tau_i^L = \sigma_i^M \sigma_i^{k_i (L l_i^{-1})} = \sigma_i^{M + k_i (L l_i^{-1})} \neq 1.$$

Nach Konstruktion hat also $\sigma_i^M \tau_i^L$ für jedes $i \in \{1, \dots, m+1\}$ unendliche Ordnung. Damit folgt der Induktionsschritt für $\widehat{h} := g^{MP} h^{LP} \in H$.

$\square$

# Kapitel 6

# Relativ hyperbolische Gruppen

In diesem Kapitel soll eine relative Version von Hyperbolizität eingeführt werden. Diese hat den Vorteil, dass sie zusätzlich zu den hyperbolischen Gruppen auch andere wichtige Klassen von Gruppen beinhaltet. Als Beispiele hierfür seien Limesgruppen (vgl. [Dah03, Theorem 4.5] und [Ali05, Korollar 3.5]) und Fundamentalgruppen vollständiger (nichtkompakter) riemannscher Mannigfaltigkeiten mit beschränkter negativer Krümmung und endlichem Volumen [Far98, Theorem 5.1] genannt.

## 6.1 Grundlagen relativer Hyperbolizität

Im Folgenden werden Osins Definitionen zu relativ hyperbolischen Gruppen verwendet. Zur Erinnerung werden einige von ihnen hier nochmals aufgelistet.

**Definition 6.1.1** (vgl. [Osi06b, Definition 2.1]). Sei $G$ eine Gruppe und $H_\Lambda = \{H_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ eine Menge von Untergruppen von $G$. Eine Teilmenge $X \subset G$ heißt relatives Erzeugendensystem von $G$ bezüglich $H_\Lambda$, falls $G$ von der Menge $\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} H_\lambda \cup X$ erzeugt wird. Im Folgenden wird hierbei immer $X = X^{-1}$ angenommen.

Es sei $\mathcal{H} = \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} (\widetilde{H}_\lambda \backslash \{1\})$ die Vereinigung von disjunkten Kopien $\widetilde{H}_\lambda$ von $H_\lambda$, wobei zusätzlich $\widetilde{H}_\lambda \cap X = \emptyset$ angenommen wird. Offenbar ist dann $G$ ein Quotient der Gruppe

$$F = (*_{\lambda\in\Lambda}\widetilde{H}_\lambda) * F(X).$$

Für $W \in (X \cup \mathcal{H})^*$ sei $\| W \|$ die Länge des Wortes $W$ in dem freien Monoiden $(X \cup \mathcal{H})^*$ und $\overline{W}$ das Bild von $W$ in $G$.

**Definition 6.1.2** (vgl. [Osi06b, Definition 2.2]). In obiger Situation sagt man, dass $G$ die relative Präsentation

$$\langle X,\ \mathcal{H} \mid S = 1 \text{ für } S \in S_\lambda,\ R = 1 \text{ für } R \in \mathcal{R} \rangle \tag{6.1}$$

bezüglich der Menge $H_\Lambda$ habe. Dabei ist $\mathcal{R} \subset (X \cup \mathcal{H})^*$ eine Menge, sodass $\langle\langle \mathcal{R} \rangle\rangle^F = ker(\varepsilon)$ gilt, wobei $\langle\langle \mathcal{R} \rangle\rangle^F$ der normale Abschluss von $\mathcal{R}$ in $F$ und $\varepsilon$ die kanonische Projektion von $F$ nach $G$ sei. $S_\lambda$ ist hierbei die Menge aller Wörter über $\widetilde{H}_\lambda \backslash \{1\}$, welche das triviale Element in $H_\lambda$ repräsentieren. Abkürzend wird die relative Präsentation von $G$ durch

$$\langle X,\ \mathcal{H} \mid R = 1 \text{ für } R \in \mathcal{R} \rangle \tag{6.2}$$

dargestellt. Die Untergruppen $H_\lambda$ werden parabolisch genannt.

Im Folgenden wird immer angenommen, dass die Menge $\mathcal{R}$ symmetrisiert ist. Das heißt also, dass $\mathcal{R}$ abgeschlossen bezüglich zyklischer Permutationen und Inversenbildung ist.

**Definition 6.1.3** (vgl. [Osi06b, Definition 2.3]). Die relative Präsentation (6.1) von $G$ heißt endlich, falls die Mengen $\mathcal{R}$ und $X$ endlich sind. Falls eine endliche Präsentation einer Gruppe $G$ bezüglich einer Menge von Untergruppen $H_\Lambda = \{H_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ existiert, so heißt $G$ endlich präsentiert bezüglich $H_\Lambda$.

**Definition 6.1.4** (vgl. [Osi06b, Definition 1.2]). Eine Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ heißt relative isoperimetrische Funktion der relativen Präsentation (6.1), falls für jedes Wort $W \in (X \cup \mathcal{H})^*$ der Länge höchstens $n$, welches die 1 in $G$ repräsentiert, ein Ausdruck der Form

$$W =_F \prod_{i=1}^{k} f_i^{-1} R_i f_i, \tag{6.3}$$

mit $f_i \in F$, $R_i \in \mathcal{R}$ und $k \leq f(n)$ existiert. Die minimale relative isoperimetrische Funktion der relativen Präsentation (6.1) wird relative Dehnfunktion von $G$ bezüglich $H_\Lambda$ genannt und mit $\delta^{rel}_{G,H_\Lambda}$ notiert. Man bemerke, dass die relative Dehnfunktion nicht zu existieren braucht, da die Menge $(X \cup \mathcal{H})^*$ im Allgemeinen unendlich viele Wörter der Länge $n$ enthalten kann. Im Falle der Existenz einer relativen Dehnfunktion spricht man davon, dass $\delta^{rel}_{G,H_\Lambda}$ wohldefiniert ist.

**Definition 6.1.5** (vgl. [Osi06b, Definition 1.6]). Eine Gruppe $G$ heißt relativ hyperbolisch bezüglich einer Menge $H_\Lambda = \{H_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ von Untergruppen, falls $G$ bezüglich $H_\Lambda$ endlich präsentiert ist und die relative Dehnfunktion von $G$ bezüglich $H_\Lambda$ durch eine lineare Funktion beschränkt ist. Im Folgenden wird bei einer relativ hyperbolischen Gruppe $G$, stets davon ausgegangen, dass ein vorgegebenes relatives Erzeugendensystem $X$ endlich ist.

**Bemerkung 6.1.6** Es sei hier ausdrücklich darauf hingewiesen, dass die Mengen $X$ und $\mathcal{H}$ zwar disjunkt sind, aber dennoch die gleichen Elemente in $G$ repräsentieren können. Das führt dazu, dass es zwischen zwei Knoten in $\Gamma(G, X \cup \mathcal{H})$ mehrere Kanten geben kann.

**Definition 6.1.7** Es sei ein Wort $W \in (X \cup \mathcal{H})^*$ gegeben. Ein Teilwort $V$ von $W$ heißt $H_\lambda$-Teilwort, falls es nur Buchstaben aus $\widetilde{H}_\lambda$ enthält. Ein $H_\lambda$-Teilwort $V$ wird $H_\lambda$-Silbe genannt, falls es in keinem $H_\lambda$-Teilwort echt enthalten ist. Unter einem zyklischen Wort $W$ ist die Menge aller zyklischen Permutationen von $W$ gemeint. Ein Teilwort $V$ eines zyklischen Wortes $W$ ist ein $H_\lambda$-Teilwort, falls es ein $H_\lambda$-Teilwort einer zyklischen Permutation von $W$ ist. Entsprechend ist ein maximales $H_\lambda$-Teilwort eines zyklischen Wortes $W$ eine $H_\lambda$-Silbe.

**Definition 6.1.8** Es sei $q$ ein Pfad in $\Gamma(G, X \cup \mathcal{H})$. Ein Teilpfad $p$ von $q$ wird $H_\lambda$-Teilpfad genannt, falls die Markierung von $p$ ein $H_\lambda$-Teilwort der Markierung von $q$ ist. Hierbei wird immer angenommen, dass ein Teilpfad eines Pfades die gleiche Orientierung wie der ursprüngliche Pfad hat. Die Abbildung, welche einem Pfad seine Markierung zuordnet, wird im Folgenden $\mu$ genannt. Eine $H_\lambda$-Komponente von $q$ ist ein $H_\lambda$-Teilpfad $p$, sodass $\mu(p)$ eine $H_\lambda$-Silbe von $\mu(q)$ ist. Ist $q$ ein Zykel in $\Gamma(G, X \cup \mathcal{H})$, so heißt ein Teilpfad $p$ von $q$ ein $H_\lambda$-Teilpfad, falls $\mu(p)$ ein Teilwort des zyklischen Wortes $\mu(q)$ ist. In diesem Fall ist eine $H_\lambda$-Komponente von $q$ ein $H_\lambda$-Teilpfad $p$ von $q$, sodass $\mu(p)$ eine $H_\lambda$-Silbe des zyklischen Wortes $\mu(q)$ ist.

**Definition 6.1.9** Zwei $H_\lambda$-Komponenten $p_1$ und $p_2$ eines Pfades $q$ (zyklisch oder nicht) in $\Gamma(G, X \cup \mathcal{H})$ werden zusammenhängend genannt, falls ein Pfad $c$ in $\Gamma(G, X \cup \mathcal{H})$ existiert, welcher einen Knoten aus $p_1$ mit einem Knoten aus $p_2$ verbindet und $\mu(c)$ ein Wort ist, welches nur Buchstaben aus $\widetilde{H}_\lambda$ enthält. Zwei $H_\lambda$-Silben $U, V$ eines Wortes $W \in (X \cup \mathcal{H})^*$ werden zusammenhängend genannt, falls die entsprechenden Komponenten eines Pfades mit Markierung $W$ in $\Gamma(G, X \cup \mathcal{H})$, zusammenhängend sind.

**Definition 6.1.10** Eine $H_\lambda$-Komponente $p$ eines Pfades $q$ (zyklisch oder nicht) wird isoliert genannt, falls diese mit keiner weiteren $H_\lambda$-Komponente von $q$ zusammenhängt. Analog wird eine isolierte $H_\lambda$-Silbe eines Wortes $W \in (X \cup \mathcal{H})^*$ definiert.

**Definition 6.1.11** Für eine relative Präsentation (6.1) und $\lambda \in \Lambda$ sei $\Omega_\lambda$ die Menge aller Elemente $h \in H_\lambda$, für die eine Relation $R \in \mathcal{R}$ und eine $H_\lambda$-Silbe $V$ von $R$ existiert, sodass $V$ das Element $h$ repräsentiert. Sei weiter $\Omega = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \Omega_\lambda$. Man bemerke, dass $\Omega$ endlich ist, falls $\mathcal{R}$ endlich ist.

**Definition 6.1.12** Eine relative Präsentation (6.1) einer Gruppe $G$ heißt reduziert, falls jede Relation $R \in \mathcal{R}$ die kürzeste Länge unter allen Wörtern in $(X \cup \mathcal{H})^*$ hat, welche das gleiche Element in

$$F = (*_{\lambda \in \Lambda} \widetilde{H}_\lambda) * F(X)$$

repräsentieren. Insbesondere besteht also für jedes $R \in \mathcal{R}$, jede $H_\lambda$-Silbe in $R$ aus einem einzigen Buchstaben aus $\widetilde{H}_\lambda$.

Das folgende Lemma gibt einem häufig die Möglichkeit zwischen den Metriken $d_X$ und $d_{X \cup \mathcal{H}}$ zu wechseln und so Aussagen über die eigentliche Gruppe $G$ zu treffen.

**Lemma 6.1.13** (vgl. [Osi06b, Lemma 2.27]). *Sei $G$ eine endlich präsentierte Gruppe bezüglich eines Systems $H_\Lambda = \{H_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ mit reduzierter, relativer Präsentation* (6.1)*. Sei weiter $q$ eine Schleife der Länge $n$ in $\Gamma(G, X \cup \mathcal{H})$ und $p_1, \ldots, p_k$ eine Menge isolierter $H_\lambda$-Komponenten von $q$. Dann gilt*

$$\overline{\mu(p_i)} \in \langle \Omega_\lambda \rangle \tag{6.4}$$

*für jedes $i \in \{1, \ldots, k\}$. Außerdem gilt $\sum_{i=1}^{k} |\overline{\mu(p_i)}|_{\Omega_\lambda} \leq M \delta^{rel}_{G,H_\Lambda}(n)$, wobei $M = \max_{R \in \mathcal{R}} ||R||$ ist.*

Im Folgenden wird für ein Wort $W \in (X \cup \mathcal{H})^*$ mit $|W|_{X \cup \mathcal{H}}$ bzw. $|W|_X$ die Länge des Elementes $\overline{W} \in G$ mit $d_{X \cup \mathcal{H}}$ bzw. $d_X$ gemessen. Ebenso wird ein Wort $W \in (X \cup \mathcal{H})^*$ mit dem Pfad $\gamma$ in $\Gamma(G, X \cup \mathcal{H})$ identifiziert, welcher beim neutralen Element startet und die Markierung $\mu(\gamma) = W$ hat. Das folgende Theorem sagt, dass eine endliche Änderung des relativen Erzeugendensystems $X$ einer relativ hyperbolischen Gruppe $G$ keine wesentlichen Änderungen der Geometrie des Raumes $\Gamma(G, X \cup \mathcal{H})$ herbeiführt. Es wird im Folgenden häufig implizit verwendet werden.

**Theorem 6.1.14** (vgl. [Osi06b, Theorem 2.34]). Es seien

$$\langle X_1, H_\lambda, \lambda \in \Lambda \mid R = 1 \text{ mit } R \in \mathcal{R}_1 \rangle$$

und

$$\langle X_2, H_\lambda, \lambda \in \Lambda \mid R = 1, R \text{ mit } \mathcal{R}_2 \rangle$$

zwei endliche relative Präsentationen einer Gruppe $G$ bezüglich einer Menge von Untergruppen $H_\lambda = \{H_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$. Seien weiter $\delta_1$ und $\delta_2$ die zugehörigen relativen Dehnfunktionen. Falls $\delta_1$ wohldefiniert ist, so ist auch $\delta_2$ wohldefiniert und es gibt Konstanten $C, K, L$ mit

$$\delta_1(n) \leq C\delta_2(Kn) + Ln \text{ und } \delta_2(n) \leq C\delta_1(Kn) + Ln \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Insbesondere hängt relative Hyperbolizität nicht von der Wahl des endlichen relativen Erzeugendensystems ab.

## 6.2 Dichotomie unendlicher Untergruppen

In diesem Abschnitt geht es darum zu zeigen, dass es für unendliche Untergruppen endlich erzeugter relativ hyperbolischer Gruppen nur zwei Möglichkeiten gibt. Entweder sie sind unbeschränkt in $\Gamma(G, X \cup \mathcal{H})$ oder sie sind zu einer Untergruppe einer parabolischen Untergruppe konjugiert. Dieses Resultat haben bereits Groves und Manning mit Hilfe der Wirkung der relativ hyperbolischen Gruppe auf ihrem Gromov-Rand erhalten (vgl. [GM15, Proposition 2.9]). Der hier vorgestellte Beweis ist elementar und von kombinatorischer Natur.

**Definition 6.2.1** Es sei $G$ eine Gruppe, die durch Isometrien auf einem metrischen Raum $(X, d)$ operiert. Die Operation heißt azylindrisch, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ Konstanten $R, N > 0$ gibt, sodass zu je zwei Punkten $x, y \in X$ mit $d(x, y) \geq R$ höchstens $N$ Elemente $g \in G$ existieren, welche die Ungleichungen $d(x, gx) \leq \varepsilon$ und $d(y, gy) \leq \varepsilon$ erfüllen.

**Bemerkung 6.2.2** Es sei $G$ eine Gruppe, die azylindrisch auf einem Raum $X$ operiert. Dann ist auch die induzierte Operation einer Untergruppe $K \leq G$ auf $X$ azylindrisch.

**Definition 6.2.3** Sei $G$ eine Gruppe, die azylindrisch auf einem hyperbolischen Raum $X$ operiert. Ein Element $g \in G$ heißt

- elliptisch, falls die Menge $\{g^n x \mid n \in \mathbb{Z}\}$ für jedes $x \in X$ beschränkt ist.
- loxodromisch, falls die Abbildung $\mathbb{Z} \to X,\ n \mapsto g^n x$ für jedes $x \in X$ eine Quasiisometrie ist.

Osin klassifiziert azylindrische Operationen auf hyperbolischen Räumen wie folgt (vgl. [Osi16, Theorem 1.1]).

**Theorem 6.2.4** *Es operiere $G$ azylindrisch auf einem hyperbolischen Raum $X$, so trifft genau eine der folgenden Aussagen zu:*

1) *$G$ hat beschränkte Orbits.*

2) *$G$ ist virtuell zyklisch und enthält ein loxodromisches Element.*

3) *$G$ enthält unendlich viele unabhängige loxodromische Elemente.*

Hierbei heißen zwei loxodromische Elemente unabhängig voneinander, falls deren Fixpunktmengen im Gromov-Rand von $X$ disjunkt sind.

**Definition 6.2.5** (vgl. [Osi06b, S.9]). Es sei $G$ eine relativ hyperbolische Gruppe bezüglich eines Systems parabolischer Untergruppen $H_\Lambda = (H_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ und einem relativen Erzeugendensystem $X$. Ein Element $g \in G$ heißt parabolisch, falls es ein $k \in G$ und ein $\lambda \in \Lambda$ mit $kgk^{-1} \in H_\lambda$ gibt. Andernfalls heißt $g$ hyperbolisch.

Dank des folgenden Resultates kann man die obige Klassifikation für relativ hyperbolische Gruppe nutzen (vgl. [Osi16, Proposition 5.2]).

**Theorem 6.2.6** *Es sei $G$ eine relativ hyperbolische Gruppe bezüglich eines Systems $H_\Lambda = \{H_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ parabolischer Untergruppen und einem relativen Erzeugendensystem $X$. Dann operiert $G$ azylindrisch durch Linksmultiplikation auf dem hyperbolischen Graphen $\Gamma(G, X \cup \mathcal{H})$.*

Mit dem folgenden Theorem sieht man leicht, dass die Menge der loxodromischen Elemente einer relativ hyperbolischen Gruppe mit den hyperbolischen Elementen unendlicher Ordnung übereinstimmt.

**Theorem 6.2.7** (vgl. [Osi06b, Theorem 1.14]). *Es sei $G$ eine relativ hyperbolische Gruppe bezüglich eines Systems parabolischer Untergruppen $H_\Lambda = (H_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ und einem relativen Erzeugendensystem $X$. Sei weiter $g \in G$ ein hyperbolisches Element mit undlicher Ordnung. Dann ist die Abbildung*

$$\mathbb{Z} \to \Gamma(G, X \cup \mathcal{H}), \ z \mapsto g^z$$

*eine Quasigeodäte.*

Um die noch folgenden Argumente zu erleichtern werden zunächst reguläre Umgebungen von Pfaden in Cayleygraphen eingeführt.

**Definition 6.2.8** Es sei $G$ eine Gruppe und $X$ ein Erzeugendensystem von $G$. Ein Wort $w = x_{i_1} \dots x_{i_n}$ in $X$ habe eine reguläre Umgebung in $\Gamma(G, X)$, falls für einen (dann jeden) Pfad $\gamma$ in $\Gamma(G, X)$ mit Markierung $w$, zwei Knoten genau dann durch eine Kante verbunden werden können, wenn sie schon aufeinanderfolgende Knoten in $\gamma$ sind. Anders ausgedrückt heißt das, dass jedes Teilwort $v$ von $w$, der Länge mindestens 2, aufgefasst als Element in $G$, die Ungleichung $|v|_X \geq 2$ erfüllt.

**Definition 6.2.9** Es sei $G$ eine endlich erzeugte, relativ hyperbolische Gruppe bezüglich $H_\Lambda = \{H_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ mit relativen Erzeugendensystem $X$. Eine Folge von Wörtern $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ über $X \cup \mathcal{H}$ erfüllt die Alternierende-Wachstumsbedingung, im Folgenden AW-Bedingung, falls alle Wörter $w_n = w_1^{(n)} \dots w_{k_n}^{(n)}$ die folgenden Bedingungen erfüllen:

1) Es gilt $k_n \geq 2$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.

2) Alle Wörter besitzen eine reguläre Umgebung.

3) Zwei aufeinanderfolgende Buchstaben $w_i^{(n)}$ und $w_{i+1}^{(n)}$ liegen weder beide in $X$, noch in der gleichen Menge $\widetilde{H}_\lambda$.

4) Die Anfangsbuchstaben $w_1^{(n)}$ liegen nicht in $X$.

5) Für Elemente $w_i^{(n)} \in \widetilde{H}_\lambda$ gilt $|w_i^{(n)}|_X \geq n$.

6) Die Elemente $w_i^{(n)} \in \widetilde{H}_\lambda$ repräsentieren keine Elemente aus

$$X \cup \bigcup_{\mu \in \Lambda \setminus \{\lambda\}} H_\mu \subset G.$$

Ersetzt man die 5. Bedingung durch die Forderung, dass die Folge $(|w_i^{(n)}|_X)_{n \in \mathbb{N}}$ unbeschränkt wächst, so kann durch Übergang zu einer Teilfolge stets sichergestellt werden, dass die 5. und 6. Bedingung erfüllt sind. Man bemerke hierfür, dass sowohl der Schnitt $H_\lambda \cap H_\mu$ für $\lambda \neq \mu$ als auch die Indexmenge $\Lambda$ endlich ist (vgl. [Osi06b, Proposition 2.36] und [Osi06b, Korollar 2.48]). Dies wird im Folgenden ohne explizite Erwähnung noch häufig benutzt.

**Lemma 6.2.10** *Es sei $G$ eine endlich erzeugte Gruppe mit Erzeugendensystem $X$. Falls $G$ relativ hyperbolisch bezüglich einer Menge parabolischer Untergruppen $H_\Lambda = \{H_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ ist, so gibt es zu jeder Länge $L \geq 0$ und jedem Punkt $p \in \Gamma(G, X \cup \mathcal{H})$ nur endlich viele Schleifen der Länge höchstens $L$ an $p$, sodass die Komponenten von $p$ isoliert sind.*

*Beweis.* Angenommen es gäbe unendlich viele Schleifen an einem Punkt $p$, welche lediglich isolierte Komponenten haben. Ohne Einschränkung kann offenbar $p = 1$ gewählt werden und die Schleifen entsprechen einfach den Wörtern der Länge höchstens $L$ in $X \cup \mathcal{H}$, welche nur isolierte Komponenten besitzen und das neutrale Element repräsentieren. Da sowohl $X$ als auch $\Lambda$ endlich sind, muss es ein $\lambda \in \Lambda$ geben, sodass $\widetilde{H}_\lambda$ unendlich viele verschiedene Markierungen von Kanten innerhalb der Schleifen enthält. Diese werden aber notwendigerweise beliebig groß bezüglich $d_X$. Dies kann jedoch nach Lemma 6.1.13 nicht passieren.

□

Das Ziel ist es nun, zu jeder Länge, unendlich viele Wörter zu konstruieren, welche die AW-Bedingung erfüllen. Zunächst soll hierfür eine Methode eingeführt werden, welche es ermöglicht, zwei Folgen, welche die AW-Bedingung erfüllen, so aneinander zu kombinieren, dass eine längere Folge entsteht, welche die AW-Bedingung erfüllt.

**Lemma 6.2.11** *Für zwei feste Zahlen $M, N \geq 2$ seien $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bzw. $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen von Wörtern der Länge $M$ bzw. $N$ über $X \cup \mathcal{H}$, welche die AW-Bedingung erfüllen. Schreibt man $v_n = v_1^{(n)} \cdots v_M^{(n)}$ und $w_n = w_1^{(n)} \cdots w_N^{(n)}$, so müssen zwei verschiedene Randbedingungen behandelt werden.*

1) *Angenommen für jedes $i \in \mathbb{N}$ gibt es Paare $(s_i, t_i) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, sodass zum einen $s_i < s_{i+1}$ und $t_i < t_{i+1}$ gilt und zum anderen $v_M^{(s_i)}$ und $w_1^{(t_i)}$ weder beide in $X$ liegen, noch Elemente der gleichen Menge $H_\lambda$ repräsentieren. Dann gibt es eine strikt monoton wachsende Folge natürlicher Zahlen $(k_i)_{i\in\mathbb{N}}$, sodass die Folge der Wörter*

$$(v_1^{(s_{k_i})} \cdots v_M^{(s_{k_i})} w_1^{(t_{k_i})} \cdots w_N^{(s_{k_i})})_{i\in\mathbb{N}}$$

*die AW-Bedingung erfüllt.*

2) *Angenommen für jedes $i \in \mathbb{N}$ gibt es ein Paare $(s_i, t_i) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, sodass zum einen $s_i < s_{i+1}$ und $t_i < t_{i+1}$ gilt und zum anderen $v_M^{(s_i)}$ und $w_1^{(t_i)}$ in der gleichen Menge $H_\lambda$ liegen. Falls die Folge $(|v_M^{(s_i)} w_1^{(t_i)}|_X)_{i\in\mathbb{N}}$ unbeschränkt wächst, dann gibt es eine strikt monoton wachsende Folge natürlicher Zahlen $(k_i)_{i\in\mathbb{N}}$, sodass die Folge der Wörter*

$$(v_1^{(s_{k_i})} \cdots v_{M-1}^{(s_{k_i})} z^{(i)} w_2^{(t_{k_i})} \cdots w_N^{(s_{k_i})})_{i\in\mathbb{N}}$$

*mit* $z^{(i)} = v_M^{(s_{k_i})} w_1^{(t_{k_i})} \in H_\lambda$ *die AW-Bedingung erfüllt.*

*Beweis.* Zunächst wird 1) bewiesen. Angenommen es gäbe keine solche Folge $(k_j)_{j\in\mathbb{N}}$. Dann gibt es also insbesondere unendlich viele Wörter der Form

$$(v_1^{(s_i)} \cdots v_M^{(s_i)} w_1^{(t_i)} \cdots w_N^{(s_i)})_{i\in\mathbb{N}},$$

welche eine der sechs Bedingungen aus der Definition 6.2.9 nicht erfüllen. Nach Konstruktion kann dies jedoch nur die 2. Bedingung sein. Ohne Einschränkung kann daher angenommen werden, dass jedes der Wörter

$$v_1^{(s_i)} \cdots v_M^{(s_i)} w_1^{(t_i)} \cdots w_N^{(s_i)}$$

zusammenhängende Komponenten besitzt. Da die Teilwörter $v_1^{(s_i)} \cdots v_M^{(s_i)}$ und $w_1^{(t_i)} \cdots w_N^{(s_i)}$ nach Voraussetzung reguläre Umgebungen haben, gibt es nach Konstruktion zwei Kanten $v_a^{(s_i)}$ und $w_b^{(t_i)}$ in $H_\lambda$, welche durch eine Kante verbunden werden können. Wähle $a$ maximal und $b$ minimal mit dieser Eigenschaft. Da benachbarte Kanten keine Markierung in der gleichen Menge $H_\lambda$ haben können, erhält man Zykel

$$q_i = v_a^{(s_i)} \cdots v_k^{(s_i)} w_1^{(t_i)} \cdots w_b^{(t_i)} u_i$$

für passend gewählte $u_i \in X \cup \mathcal{H}$, im denen alle Komponenten isoliert sind und aus einzelnen Kanten bestehen. Da jedoch die Länge der Zykel $q_i$ durch $M+N+1$ beschränkt ist, kann es nach Lemma 6.2.10 nur endlich viele solche Schleifen geben. Das widerspricht jedoch der Tatsache, dass $q_i$ die Kante $w_1^{(t_i)}$ enthält, welche nach Voraussetzung unbeschränkt in $d_X$ wächst.
Teil 2) wird nun auf Teil 1) zurückgeführt. Angenommen es gäbe keine solche Folge $(k_j)_{j\in\mathbb{N}}$. Dann gäbe es insbesondere unendlich viele Wörter der Form

$$(v_1^{(s_i)} \cdots v_{M-1}^{(s_i)} z^{(i)} w_2^{(t_i)} \cdots w_N^{(s_i)})_{i\in\mathbb{N}}$$

mit $z^{(i)} = v_M^{(s_i)} w_1^{(t_i)}$, welche eine der sechs Bedingungen aus der Definition 6.2.9 nicht erfüllen. Nach Konstruktion kann dies jedoch nur die 2. Bedingung sein. Angenommen die Wörter $v_1^{(s_i)} \cdots v_{M-1}^{(s_i)} z^{(i)}$ besitzen keine reguläre Umgebung. Da die Wörter $v_1^{(s_i)} \cdots v_{M-1}^{(s_i)}$ jeweils eine reguläre Umgebung besitzen, gibt es ein maximales $a$, sodass es einen Zykel der Form $q_i = v_a^{(s_i)} \cdots v_{M-1}^{(s_i)} z^{(i)} u_i$ gibt. Aufgrund der Maximalität von $a$ besitzt $q_i$ nur isolierte Komponenten, welche jeweils nur aus einer Kante bestehen. Hiervon kann es nach Lemma 6.2.10, aufgrund der beschränkten Länge der $q_i$ nur endlich viele geben. Nach Voraussetzung wächst jedoch die Folge $(|u_i|_X)_{i\in\mathbb{N}}$ unbeschränkt und es ist jeweils $u_i$ in $q_i$ enthalten. Also besitzen die Wörter

$$v_1^{(s_i)} \cdots v_{M-1}^{(s_i)} z^{(i)} \text{ und } w_2^{(t_i)} \cdots w_N^{(s_i)}$$

reguläre Umgebungen und erfüllen auch sonst die AW-Bedingungen. Da nun $z^{(i)}$ und $w_2^{(t_i)}$ nach Konstruktion weder beide in $X$ liegen, noch beide in der gleichen Menge $H_\lambda$ liegen, sind die Voraussetzungen für den Fall 1) erfüllt und die Aussage folgt.

□

**Korollar 6.2.12** *Sei $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Wörtern der Länge $m \geq 2$ über $X \cup \mathcal{H}$, welche die AW-Bedingung erfüllt. Sei weiter $K$ die von $\{w_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ erzeugte Untergruppe. Dann gibt es ein $C \geq 0$, sodass zu je zwei natürlichen Zahlen $M, N \in \mathbb{N}$, eine Folge von Wörter $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existiert, welche die AW-Bedingung erfüllt sodass die Länge der Wörter durch $M < \|v_n\| < M + C$ beschränkt ist und jedes $v_n$ ein Element der Gruppe $K$ repräsentiert.*

*Beweis.* Die Definition der AW-Bedingung impliziert nun, dass bei Übergang zu einer Teilfolge angenommen werden kann, dass alle $w^{(n)}$ eine der beiden folgenden Eigenschaften haben.

1) $w_1^{(n)}$ und $w_m^{(n)}$ liegen nicht in der gleichen Menge $H_\lambda$.

2) $w_1^{(n)}$ und $w_m^{(n)}$ liegen in der gleichen Menge $H_\lambda$ und es gilt $|w_1^{(n)}|_X, |w_m^{(n)}|_X \geq n$.

Es soll Lemma 6.2.11 induktiv angewandt werden. Angenommen es gilt der erste Fall. Dann gibt es nach Lemma 6.2.11 1) Teilfolgen

$$(w_1^{(i_n)} \cdots w_m^{(i_n)})_{n\in\mathbb{N}} \text{ und } (w_1^{(j_n)} \cdots w_m^{(j_n)})_{n\in\mathbb{N}},$$

sodass auch die zusammengesetzte Folge

$$(v_n)_{n\in\mathbb{N}} := (w_1^{(i_n)} \cdots w_m^{(i_n)} w_1^{(j_n)} \cdots w_m^{(j_n)})_{n\in\mathbb{N}}$$

die AW-Bedingung erfüllt. Weiter gilt $\| v_n \| = 2m$ und es kann Lemma 6.2.11 auf die beiden Folgen $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(w_1^{(i_n)} \cdots w_m^{(i_n)})_{n\in\mathbb{N}}$ angewandt werden. Induktiv erhält man damit für jedes $k \in \mathbb{N}$ eine Folge der Länge $km$, welche die AW-Bedingung erfüllt.
Im Falle von 2) gibt es wegen des unbeschränkten Wachstums von $|w_1^{(n)}|_X$ offenbar Teilfolgen $(w_1^{(n)} \cdots w_m^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ und $(w_1^{(k_n)} \cdots w_m^{(k_n)})_{n\in\mathbb{N}}$, welche die Voraussetzung von Lemma 6.2.11 $b$) erfüllen. Daher können wiederum Teilfolgen

$$(w_1^{(i_n)} \cdots w_m^{(i_n)})_{n\in\mathbb{N}} \text{ und } (w_1^{(j_n)} \cdots w_m^{(j_n)})_{n\in\mathbb{N}}$$

gefunden werden, sodass auch

$$(v_n)_{n\in\mathbb{N}} := (w_1^{(i_n)} \cdots w_{m-1}^{(i_n)} z_n w_2^{(j_n)} \cdots w_m^{(j_n)})_{n\in\mathbb{N}}$$

die AW-Bedingung erfüllt. Hierbei ist $\| v_n \| = 2m-1$ und man kann Lemma 6.2.11 auf die Folgen $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(w_1^{(i_n)} \cdots w_m^{(i_n)})_{n\in\mathbb{N}}$ anwenden. Induktiv ergeben sich so Folgen von Wörtern, welche die AW-Bedingung erfüllen und eine Länge von $km - k = k(m-1)$ haben. Setzt man also $C = m$, so ist die Aussage gezeigt.

□

**Lemma 6.2.13** *Es sei $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Wörtern, welche die AW-Bedingung erfüllt, dann ist die davon erzeugte Untergruppe $K$ unbeschränkt bezüglich $d_{X\cup\mathcal{H}}$.*

*Beweis.* Angenommen dies wäre nicht der Fall. Dann gäbe es ein $N \in \mathbb{N}$, sodass alle Elemente von $K$ eine $d_{X\cup\mathcal{H}}$-Länge von höchstens $N$ haben. Nach Korollar 6.2.12 gibt es jedoch ein $L \geq 4N$, sodass eine Folge von Wörtern $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ über $(X \cup \mathcal{H})$ existiert, welche die AW-Bedingung erfüllt und jedes $v_n$ die Wortlänge $L$ hat und ein Element aus $K$ repräsentiert. Durch Übergang zu einer Teilfolge kann angenommen werden, dass $|v_n|_{X\cup\mathcal{H}} = M \leq N$ gilt. Daher gibt es Geodäten $u_1^{(n)} \cdots u_M^{(n)}$, sodass $q_n = v_1^{(n)} \cdots v_L^{(n)} u_1^{(n)} \cdots u_M^{(n)}$ eine Schleife in $\Gamma(G, X\cup\mathcal{H})$ ist. Wegen der AW-Bedingung gibt es eine reguläre Umgebung für $v_1^{(n)} \cdots v_L^{(n)}$. Insbesondere sind die Komponenten von $v_1^{(n)} \cdots v_L^{(n)}$ isoliert und bestehen jeweils nur aus einer Kante. Die AW-Bedingung sagt jetzt zudem, dass mindestens jede zweite Kante isoliert ist. Damit gibt es mindestens $2N$ isolierte Komponenten in $v_1^{(n)} \cdots v_L^{(n)}$. Nun kann es zu jeder isolierten Komponente $u_i^{(n)}$ höchstens eine isolierte Komponente $v_j^{(n)}$ geben, welche mit $u_i^{(n)}$ zusammenhängt, da es andernfalls eine Verbindung zwischen zwei verschiedenen isolierten Komponenten von $v_1^{(n)} \cdots v_L^{(n)}$ gäbe. Es bleiben also noch mindestens $2N - M \geq N$ isolierte Komponenten $v_i^{(n)}$ übrig, welche isoliert im Zykel $q_n$ sind. Da diese nach der AW-Bedingung unbeschränkt wachsen und die Länge der Zykel $q_n$ durch $N + L$ beschränkt ist, ergibt sich nun ein Widerspruch zur Aussage von Lemma 6.2.10.

□

**Lemma 6.2.14** *Sei $G$ eine im herkömmlichen Sinne endlich erzeugte, relativ hyperbolische Gruppe bezüglich eines Systems parabolischer Untergruppen $H_\Lambda = (H_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ und eines relativen Erzeugendensystems $X$ von $G$. Sei $K \leq G$ eine unendliche Untergruppe, welche kein hyperbolisches Element unendlicher*

*Ordnung enthält. Dann gibt es ein Konjugat $gKg^{-1}$ von $K$ und einen Index $\eta \in \Lambda$ mit $|gKg^{-1} \cap H_\eta| = \infty$.*

*Beweis.* Nach Theorem 6.2.7 bilden die hyperbolischen Elemente unendlicher Ordnung in relativ hyperbolischen Gruppen genau die Menge der loxodromischen Elemente. Aus obiger Klassifikation azylindrischer Operationen auf hyperbolischen Räumen folgt damit, dass die Orbits der Operation von $K$ auf $\Gamma(G, X \cup \mathcal{H})$ beschränkt sind. Insbesondere ist also auch das Bild von $K$ in $\Gamma(G, X \cup \mathcal{H})$ beschränkt. Damit ist also auch für jedes endliche relative Erzeugendensystem $X$ von $G$ das Bild jedes Konjugates $gKg^{-1}$ beschränkt in $\Gamma(G, X \cup \mathcal{H})$. Wähle nun $n \in \mathbb{N}$ minimal mit folgender Eigenschaft:
Es existiert ein Konjugat $H = gKg^{-1}$ von $K$ und ein endliches Erzeugendensystem $X$ von $G$ relativ $\mathcal{H}$, sodass es eine unendliche Folge paarweise verschiedener Elemente $k_j \in H$ der Form

$$k_j = u_1^{(j)} \cdots u_n^{(j)}$$

gibt, sodass die Wörter $u_1^{(j)} \cdots u_n^{(j)}$ Markierungen von Geodäten in $\Gamma(G, X \cup \mathcal{H})$ sind. Weiter soll das zu $n$ gehörige endliche relative Erzeugendensystem $X$ so erweitert werden, dass $X$ die ganze Gruppe $G$ erzeugt und $X = X^{-1}$ gilt. Angenommen es wäre $n = 1$. Zunächst ist die Menge $X$ nach Voraussetzung endlich. Daher liegen unendlich viele Folgeglieder in $\mathcal{H} = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (\widetilde{H}_\lambda \backslash \{1\})$. Da $G$ endlich erzeugt ist, muss die Indexmenge $\Lambda$ endlich sein (vgl. [Osi06b, Korollar 2.48]). Es muss also ein $\lambda \in \Lambda$ geben, sodass in der unendlichen Folge der paarweise verschiedenen Elemente $(k_j)_{j \in \mathbb{N}}$ unendlich viele in $H_\lambda$ liegen. Dann ist jedoch der Schnitt eines Konjugates von $K$ mit einem $H_\lambda$ unendlich, was zu zeigen war. Es wird nun gezeigt, dass die Annahme $n \geq 2$ widersprüchlich ist. Sei also $n \geq 2$. Zunächst wird die Folge etwas modifiziert. Angenommen es existieren unendlich viele $j \in \mathbb{N}$, sodass $u_1^{(j)} \in X$ gilt. Da $X$ endlich ist, gibt es ein $x_1 \in X$ und eine Teilfolge $(k_{j_m})_{m \in \mathbb{N}}$ von $(k_j)_{j \in \mathbb{N}}$ mit $u_1^{(j_m)} = x_1$ für jedes $m$. Falls es nur endlich viele $j$ mit $u_1^{(j)} \in X$ gibt, dann gibt es wegen der Endlichkeit von $\Lambda$ ein $\lambda_1 \in \Lambda$ und eine Teilfolge $(k_{j_m})_{m \in \mathbb{N}}$ mit $u_1^{(j_m)} \in H_{\lambda_1}$ für jedes $m$. Falls es ein $h_1 \in H_{\lambda_1}$ gibt, sodass $u_1^{(j_m)} = h_1$ für unendlich viele $m$ gilt, so können $h_1$ und $h_1^{-1}$ zu $X$ hinzugefügt werden und es tritt wieder der erste Fall ein. Man bemerke hierbei, dass nach Voraussetzung, eine endliche Vergrößerung von $X$ die Situation nicht ändert. In dem übrig gebliebenen Fall kann die Teilfolge offenbar mit der Eigenschaft $|v_i^{(j_m)}|_X < |v_i^{(j_{m+1})}|_X$ gewählt werden. In beiden Fällen soll die ursprüngliche Folge durch die Teilfolge ersetzt werden. Völlig analog wird mit $u_i^{(j_m)}$ für $i \in \{2, \ldots, n\}$ verfahren. Schreibe $g_j = v_1^{(j)} \cdots v_n^{(j)} \in H$ für die so entstandene

Folge. Man kann nun annehmen, dass zwei aufeinander folgende Elemente $v_i^{(j)}, v_{i+1}^{(j)}$ bzw. $v_n^{(j)}, v_1^{(j)}$ nicht beide in $X$ liegen, da ansonsten die Elemente $v_i^{(j)}v_{i+1}^{(j)}$ und $(v_i^{(j)}v_{i+1}^{(j)})^{-1}$ bzw. $v_n^{(j)}v_1^{(j)}$ und $(v_n^{(j)}v_1^{(j)})^{-1}$ zu $X$ hinzugefügt werden könnten und eine kürzere Folge unendlich vieler, paarweise verschiedener Elemente in $H$ bzw. $v_{-1}^{(j)}Hv_1^{(j)}$ entstünde (gemessen in $d_{X\cup\mathcal{H}}$). Aus dem gleichen Grund kann angenommen werden, dass zwei aufeinanderfolgende Elemente $v_i^{(j)}$ und $v_{i+1}^{(j)}$ nicht beide in der gleichen parabolischen Gruppe $H_\lambda$ liegen. Um sicherzustellen, dass die vierte Bedingung gewährleistet ist, kann ein Element $v_1^{(j)}\cdots v_n^{(j)}$ durch sein Inverses $(v_1^{(j)}\cdots v_n^{(j)})^{-1} = (v_n^{(j)})^{-1}\cdots(v_1^{(j)})^{-1}$ ersetzt werden. Durch erneutes Übergehen zu einer Teilfolge kann nun angenommen werden, dass die Folge die AW-Bedingung erfüllt. Der Widerspruch folgt nun sofort mit Lemma 6.2.13.

$\square$

Das folgende Resultat hilft bei der Erzeugung loxodromischer Elemente in relativ hyperbolischen Gruppen (vgl. [Osi06a, Lemma 4.4]).

**Satz 6.2.15** *Sei $G$ eine relativ hyperbolische Gruppe bezüglich eines Systems $\{H_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ von Untergruppen von $G$. Dann gibt es für jedes $\lambda \in \Lambda$ und jedes Element $g \in G\backslash H_\lambda$ eine endliche Menge $F_\lambda \subset H_\lambda$, sodass für jedes $h \in H_\lambda\backslash F_\lambda$ das Element $hg$ hyperbolisch von unendlicher Ordnung ist.*

Es ergibt sich nun, die für die Untersuchung der relativen exponentiellen Wachstumsrate, wichtige Dichotomie zwischen Konjugaten von Untergruppen parabolischer Gruppen und Untergruppen, welche wesentlich im "hyperbolischen Teil"der Gruppe liegen. Folgendes Resultat gibt Hoffnung auf die Möglichkeit, dass die relative exponentielle Wachstumsrate ein lokal-global-Prinzip für relativ hyperbolische Gruppen erfüllt (vgl. 7.0.21).

**Korollar 6.2.16** *Sei $G$ eine, im herkömmlichen Sinne endlich erzeugte, relativ hyperbolische Gruppe bezüglich eines (notwendigerweise) endlichen Systems $H_\Lambda = (H_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ parabolischer Untergruppen und eines relativen Erzeugendensystems $X$ von $G$. Sei $K \leq G$ eine unendliche Untergruppe, welche kein hyperbolisches Element unendlicher Ordnung enthält, dann ist $K$ zu einer Untergruppe einer parabolischen Untergruppe konjugiert.*

*Beweis.* Nach Theorem 6.2.14 gibt es ein $\eta \in \Lambda$ und ein $g \in G$ mit $|gKg^{-1} \cap H_\eta| = \infty$. Angenommen $gKg^{-1}$ ist keine Untergruppe von $H_\eta$. Dann gäbe es ein $a \in gKg^{-1}\backslash H_\eta$. Wählt man dann eine unendliche Folge von Elementen

$h_n \in H_\eta$, so gäbe es nach Satz 6.2.15 ein $n$, sodass $ah_n \in gKg^{-1}$ hyperbolisch von unendlicher Ordnung ist. Das kann jedoch nicht sein, da $K$ periodisch ist.

$\square$

# Kapitel 7

# Offene Fragen

Bei der Untersuchung der relativen exponentiellen Wachstumsrate traten eine Vielzahl von Fragen auf. Die folgende Liste enthält einige, die mich besonders lange beschäftigt haben.

**Frage 7.0.17** Angenommen die relative exponentielle Wachstumsrate existiert für eine Untergruppe $H$ einer endlich erzeugten Gruppe $G$ bezüglich eines Erzeugendensystems $X$. Sei nun $Y$ ein weiteres Erzeugendensystem von $G$. Existiert die relative exponentielle Wachstumsrate von $H$ in $G$ bezüglich $X$?

**Frage 7.0.18** Kann man Theorem 1.2.25 im folgenden Sinn auf hyperbolische Gruppen erweitern? Es sei $G$ eine nicht-elementare, endlich erzeugte hyperbolische Gruppe mit endlichem Erzeugendensystem $X$ und $H < G$ eine endlich erzeugte Untergruppe vom unendlichen Index in $G$. Gilt dann

$$\lim_{n\to\infty} \beta_H^X(n)^{\frac{1}{n}} < \lim_{n\to\infty} \beta_G^X(n)^{\frac{1}{n}}?$$

**Frage 7.0.19** Olshanski hat eine endlich erzeugte, auflösbare, jedoch nicht endlich präsentierte Gruppe $G$ konstruiert, welche eine unendliche zyklische Untergruppe $H$ enthält, für welche die relative exponentielle Wachstumsrate bezüglich keinem endlichen Erzeugendensystems existiert (vgl. [Ols13, Bemerkung 3.1]). Unklar bleibt jedoch weiterhin, ob es auch Beispiele endlich präsentierbarer oder gar One-Relator-Gruppen gibt, welche Untergruppen enthalten, deren relative exponentielle Wachstumsrate für kein Erzeugendensystem existiert.

**Frage 7.0.20** Außer hyperbolischen Gruppen gibt es noch weitere Klassen von Gruppen, deren Geometrie man für den Nachweis der relativen exponentiellen Wachstumsrate nutzen könnte. Hierzu gehören vor allem semihyperbolischen Gruppen und $CAT(0)$-Gruppen. Auch hier ist noch Unklar, ob die relative exponentielle Wachstumsrate einer beliebigen Untergruppe bezüglich eines beliebigen endlichen Erzeugendensystems existiert.

**Frage 7.0.21** Es sei $H_\Lambda = (H_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ein endliches System endlich erzeugter Gruppen, sodass für jedes $\lambda \in \Lambda$ und jede Untergruppe $K \leq H_\lambda$ die relative exponentielle Wachstumsrate bezüglich eines passenden Erzeugendensystems von $H_\lambda$ existiert. Sei nun $G$ eine relativ hyperbolische Gruppe bezüglich $H_\Lambda = \{H_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ und $K \leq G$ eine beliebige Untergruppe. Gibt es ein Erzeugendensystem $X$ von $G$, sodass die relative exponentielle Wachstumsrate von $K$ in $G$ bezüglich $X$ existiert? Eine positive Antwort der folgenden Frage würde auch diese Frage positiv beantworten.

**Frage 7.0.22** Es sei $G$ eine endlich erzeugte Gruppe und $H \leq G$ eine endlich erzeugte, unverzerrte Untergruppe. Sei $K \leq H$ eine Untergruppe, für welche die relative exponentielle Wachstumsrate von $K$ in $H$ bezüglich eines passenden Erzeugendensystems von $H$ existiert. Existiert dann auch die relative exponentielle Wachstumsrate von $K$ in $G$ für ein passendes Erzeugendensystem von $G$?

**Frage 7.0.23** Inwieweit ist die Existenz der relativen exponentiellen Wachstumsrate mit der Zusammensetzung von Gruppen verträglich? Ich gehe davon aus, dass die relative exponentielle Wachstumsrate aller Untergruppen eines freien Produktes $G_1 * G_2$ für jeweils passende Erzeugendensysteme genau dann existiert, wenn dies auch für die einzelnen Faktoren gilt. Schwieriger ist schon die Frage, ob sich eine analoge Aussage für amalgamierte Produkte $G_1 *_{A=B} G_2$ oder direkte Produkte $G_1 \times G_2$ treffen lässt. Auch der Fall von HNN-Erweiterungen $G*_A$ ist noch offen.

# Literaturverzeichnis

[Ali05] Alibegović, Emina: A combination theorem for relatively hyperbolic groups. Bulletin of the London Mathematical Society, 37(3):459–466, 2005.

[BG04] Bridson, Martin R und Fritz J Grunewald: Grothendieck's problems concerning profinite completions and representations of groups. Annals of mathematics, Seiten 359–373, 2004.

[BH99] Bridson, Martin R und André Haefliger: Metric spaces of non-positive curvature, Band 319. Springer Science & Business Media, 1999.

[BMMS12] Birget, Jean-Camille, Stuart Margolis, John Meakin und Mark V Sapir: Algorithmic problems in groups and semigroups. Springer Science & Business Media, 2012.

[BR84] Baumslag, Gilbert und James E Roseblade: Subgroups of direct products of free groups. Journal of the London Mathematical Society, 2(1):44–52, 1984.

[CWM+68] Carlitz, L, A Wilansky, John Milnor, RA Struble, Neal Felsinger, JMS Simoes, EA Power, RE Shafer und RE Maas: Advanced Problems: 5600-5609. The American Mathematical Monthly, 75(6):685–687, 1968.

[Dah03] Dahmani, François: Combination of convergence groups. Geometry & Topology, 7(2):933–963, 2003.

[DO12] Davis, Tara C und Alexander Yu Olshanskii: Relative subgroup growth and subgroup distortion. arXiv preprint arXiv:1212.5208, 2012.

[Efr53] Efremovic, Vadim Arsenyevich: The proximity geometry of Riemannian manifolds. Uspekhi Mat. Nauk, 8(5):57, 1953.

[Far94] Farb, Benson: The extrinsic geometry of subgroups and the generalized word problem. Proceedings of the London Mathematical Society, 3(3):577–593, 1994.

[Far98] Farb, Benson: Relatively hyperbolic groups. Geometric and functional analysis, 8(5):810–840, 1998.

[GdLH90] Ghys, É. und P. de La Harpe: Sur les groupes hyperboliques d'après Mikhael Gromov:. Progress in mathematics. Birkhäuser, 1990.

[GDLH97] Grigorchuk, Rostislav und Pierre De La Harpe: On problems related to growth, entropy, and spectrum in group theory. Journal of dynamical and control systems, 3(1):51–89, 1997.

[GM15] Groves, Daniel und Jason Fox Manning: Dehn fillings and elementary splittings. arXiv preprint arXiv:1506.03831, 2015.

[Gri80a] Grigorchuk, Rostislav I: Symmetrical random walks on discrete groups. Adv. Probab. Related Topics, 6:285–325, 1980.

[Gri80b] Grigorchuk, Rostislav Ivanovich: Burnside problem on periodic groups. Funktsional'nyi Analiz i ego Prilozheniya, 14(1):53–54, 1980.

[Gri85] Grigorchuk, Rostislav Ivanovich: Degrees of growth of finitely generated groups, and the theory of invariant means. Izvestiya: Mathematics, 25(2):259–300, 1985.

[Gro81] Gromov, Mikhael: Groups of polynomial growth and expanding maps (with an appendix by Jacques Tits). Publications Mathématiques de l'IHÉS, 53:53–78, 1981.

[Gro87] Gromov, Mikhael: Hyperbolic groups. Springer, 1987.

[Gro96] Gromov, Mikhail: Geometric group theory, Vol. 2: Asymptotic invariants of infinite groups. 1996.

[Gru14] Gruzdev, Valentin: Relative growth rate of subgroups of free groups. Doktorarbeit, Memorial University of Newfoundland, 2014.

[LS15] Lyndon, Roger C und Paul E Schupp: Combinatorial group theory. Springer, 2015.

[M+68] Milnor, John et al.: A note on curvature and fundamental group. Journal of Differential geometry, 2(1):1–7, 1968.

[Ols13] Olshanskii, A.: Subnormal subgroups in free groups, their growth and cogrowth. ArXiv e-prints, November 2013.

[Osi00] Osin, Denis Valentinovich: Problem of intermediate relative growth of subgroups in solvable and linear groups. Trudy Matematicheskogo Instituta im. VA Steklova, 231:332–355, 2000.

[Osi02] Osin, DV: Exponential radicals of solvable Lie groups. Journal of Algebra, 248(2):790–805, 2002.

[Osi06a] Osin, Denis V: Elementary subgroups of relatively hyperbolic groups and bounded generation. International Journal of Algebra and Computation, 16(01):99–118, 2006.

[Osi06b] Osin, Denis V: Relatively hyperbolic groups: intrinsic geometry, algebraic properties, and algorithmic problems, Band 843. American Mathematical Soc., 2006.

[Osi16] Osin, Denis: Acylindrically hyperbolic groups. Transactions of the American Mathematical Society, 368(2):851–888, 2016.

[Tit72] Tits, Jacques: Free subgroups in linear groups. Journal of Algebra, 20(2):250–270, 1972.

# Erklärung

Hiermit versichere ich, dass ich die Masterarbeit selbständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe.

Düsseldorf, den 25. Juli 2016

(Eduard Schesler)